ЛЕКЦИЯ 8

Для комплексной кривой X обозначим $\mathcal{M}(X)$ поле мероморфных функций на ней. Пусть кривая X компактна, и $P(z,t) = t^n + c_1(z)t^{n-1} + \dots + c_n(z) \in \mathcal{M}(X)[T]$ — неприводимый многочлен с коэффициентами $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X)$. Поскольку P неприводим, его дискриминант $\Delta(z)$ не равен нулю как элемент $\mathcal{M}(X)$ и, следовательно, не равен тождественно нулю как функция точки $z \in X$. Тем самым существует $z \in X$ и $a \in \mathbb{C}$ такие, что $P(z,a) = 0$ и $\frac{\partial P}{\partial t}(z,a) \neq 0$. Из теоремы о неявной функции вытекает, что существует росток голоморфной функции f в точке z такой, что $f(z) = a$ и $P(x, f(x)) = 0$ для всех $x \in U$.

Рассмотрим аналитическое продолжение ростка (f,z). Поскольку дискриминант $\Delta(z)$ не равен тождественно нулю, он имеет конечное число нулей $x_1, \dots, x_N$. Из теоремы о круге сходимости следует, что росток (f,z) можно голоморфно продолжить во все точки, кроме $x_1, \dots, x_N$ и полюсов функций $c_1, \dots, c_n$ — то есть образом естественной проекции $\pi : \mathcal{A}(f,z) \to X$ является $X \setminus T$, где T — конечное множество. Отображение $\pi : \mathcal{A}(f,z) \to X \setminus T$ — конечнолистное накрытие (число листов не превосходит n). Согласно теореме 2 лекции 7, можно вложить $\mathcal{A}(f,z)$ в компактную комплексную кривую Y так, что $Y \setminus \mathcal{A}(f,z)$ состоит из конечного числа точек, а π продолжится до собственного голоморфного отображения $\pi : Y \to X$. На кривой Y определена также голоморфная функция $\tilde{f}$ — аналитическое продолжение ростка f. Если $U \subset X$ — малая окрестность точки z, и $p = (g,y) \in W(U,f) \subset \mathcal{A}(f,z)$, то это означает, что $y \in U$, а (g,y) — росток самой f, совместимый с ростком (f,z); поэтому $\tilde{f}(p) = g(y) = f(y)$. Следовательно, во всех точках $p \in W(U,f)$ функция $\tilde{f}$ удовлетворяет уравнению $P(\pi(p), \tilde{f}(p)) = 0$ — следовательно, по принципу аналитического продолжения, она удовлетворяет этому уравнению на всей (связной !) кривой Y.

Кривую Y называют римановой поверхностью алгебраической функции, определенной уравнением $P(z,t) = 0$.

Замечание 1. Можно показать (мы не будем этого делать), что всякая компактная комплексная кривая является римановой поверхностью некоторой алгебраической функции на $\mathbb{C}P^1$.

С каждым голоморфным отображением $F : X \to Y$ связан гомоморфизм полей $F^* : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$, действующий по правилу $F^*(f)(x) = f(F(x))$.

Теорема 1. *Пусть X, Y — компактные связные комплексные кривые, и $F : X \to Y$ — голоморфное отображение степени n. Тогда отображение $F^* : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ — вложение, и $\dim(\mathcal{M}(X)/F^*(\mathcal{M}(Y))) \leq n$.*

Доказательство. Если $F^*(g) \equiv 0$, то $g \equiv 0$ на множестве $F(X) \subset Y$. Согласно теореме 1 лекции 7 имеем $F(X) = Y$, откуда $g = 0$ и отображение F^* не имеет ядра.

Пусть $y \in Y$ — некритическое значение отображения F, так что $F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $g \in \mathcal{M}(X)$. Положим $P_i(y) = e_i(g(x_1), \dots, g(x_n))$, где $e_i(z_1, \dots, z_n)$ — i-я элементарная симметрическая функция. Тогда все функции P_i мероморфны, и $g^n + F^*(P_1)g^{n-1} + \dots + F^*(P_n) = 0$ во всех точках $x \in X \setminus F^{-1}(F(S))$. Поскольку множество $F^{-1}(F(S))$ конечно, равенство выполнено также и при $x \in F^{-1}(F(S))$. Тем самым всякий элемент $g \in \mathcal{M}(X)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению степени n с коэффициентами из $F^*(\mathcal{M}(Y))$. По теореме о примитивном элементе $\mathcal{M}(X) = F^*(\mathcal{M}(Y))(h)$ для некоторой функции h; функция h — как и любая другая — удовлетворяет уравнению степени n. Поэтому $\dim(\mathcal{M}(X)/F^*(\mathcal{M}(Y))) = \dim_{F^*(\mathcal{M}(Y))} F^*(\mathcal{M}(Y))(h) \leq n$. □

Замечание 2. На самом деле степень расширения всегда равна n. Для доказательства достаточно было бы построить мероморфную функцию $g \in \mathcal{M}(X)$, принимающую в точках $x_1, \dots, x_n$ попарно различные значения — если бы она удовлетворяла алгебраическому уравнению степени $m < n$ с коэффициентами из $F^*(\mathcal{M}(Y))$, значений было бы не больше m. Но в этом курсе мы не сможем доказать существование такой функции.

Пусть в условиях теоремы 1 $G : X \to X$ — голоморфный автоморфизм, для которого $F \circ G = F$ (т.е. G сохраняет слои отображения F). Тогда отображение $G^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$, действующее по правилу $G^*f = f \circ G$ — автоморфизм поля, сохраняющий на месте все элементы подполя $F^*\mathcal{M}(Y) \subset \mathcal{M}(X)$. Иными словами, G^* — элемент группы Галуа расширения $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]$.

Замечание 3. На самом деле всякий элемент группы Галуа представим в виде G^*, но доказывать этого мы не будем.

Задача. Выведите утверждение замечания 3 из утверждения замечания 1.

Теорема 2. *Всякая компактная комплексная кривая рода 1 биголоморфно эквивалентна эллиптической кривой $\mathcal{E}_L$, т.е. фактору $\mathbb{C}/L$, где $L \subset \mathbb{C}$ — решетка.*

Доказательство. Пусть X — компактная комплексная кривая рода 1, а $\varrho : Y \to X$ — ее универсальное накрытие. По теореме Кебе имеем либо $Y = \mathbb{C}$, либо $Y = H$ (верхняя полуплоскость).

Лемма 1. *Пусть $\varrho : Y \to X$ — голоморфное универсальное накрытие комплексной кривой. Тогда $X = Y/L$, где L — группа, состоящая из биголоморфных автоморфизмов Y, изоморфная $\pi_1(X)$ и действующая на Y разрывно: для всякой точки $y \in Y$ найдется ее окрестность U такая, что образы $\ell(U)$ при различных $\ell \in L$ не пересекаются.*

Доказательство леммы 1. Группа $L = \pi_1(X)$ действует на накрывающем пространстве Y следующим образом: пусть $y \in Y$ и $[\gamma] \in \pi_1(X)$ — класс, представленный кривой $\gamma : [0,1] \to X$, у которой $\gamma(0) = \gamma(1) = \varrho(y)$. Рассмотрим поднятие $\tilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ этой кривой, для которого $\tilde{\gamma}(0) = y$ — по теореме о накрывающей гомотопии оно существует и единственно — и определим $[\gamma](y) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\gamma}(1)$. Из того, что $\varrho(\tilde{\gamma}(1)) = \varrho(y)$, а точки прообраза $\varrho^{-1}(\varrho(y))$ взаимно однозначно соответствуют элементам $\pi_1(X)$, вытекает разрывность действия. Поскольку проекция ϱ — локальный биголоморфный изоморфизм, построенные преобразования $[\gamma] : Y \to Y$ — биголоморфные автоморфизмы. $\square$

Пусть сначала $Y = \mathbb{C}$. то есть $X = \mathbb{C}/L$, где L — группа биголоморфных автоморфизмов $\mathbb{C}$, т.е. неоднородных линейных преобразований. Из леммы вытекает, в частности, что преобразование $\sigma \in L$, отличное от тождественного, не может иметь неподвижных точек, откуда следует, что $\sigma(z) = z + c$ для некоторой константы $c \in \mathbb{C}$. Группа L порождена двумя коммутирующими образующими: $u(z) = z + a$ и $v(z) = z + b$. Поскольку орбита произвольной точки $z \in \mathbb{C}$ под действием группы L должна быть дискретна, а фактор $\mathbb{C}/L = X$ компактен, должно быть $b/a \notin \mathbb{R}$, откуда вытекает, что группа L — решетка.

Покажем теперь, что случай $X = H$ невозможен. Действительно, пусть $X = H/L$, где L — группа биголоморфных автоморфизмов H, Биголморфные автоморфизмы H это дробно-линейные преобразования вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$; числа a, b, c, d определены с точностью до умножения на (вещественное) число; то есть вся группа это $\mathrm{PGL}^+(2, \mathbb{Z})$

Лемма 2. *Преобразования $A \in \mathrm{PGL}^+(2, \mathbb{Z})$, отличные от тождественного, делятся на три класса:*

(1) *Эллиптические преобразования: $(d-a)^2 + 4bc < 0$. Каждое такое преобразование имеет в H ровно одну неподвижную точку, а на границе ∂H неподвижных точек не имеет.*
(2) *Гиперболические преобразования: $(d-a)^2 + 4bc > 0$. Каждое такое преобразование не имеет в H неподвижных точек, а на границе ∂H имеет две неподвижных точки (одна из которых может быть в бесконечности).*
(3) *Параболические преобразования: $(d-a)^2 + 4bc = 0$. Каждое такое преобразование не имеет в H неподвижных точек, а на границе ∂H имеет одну неподвижных точки (возможно, в бесконечности).*

Неподвижную точку в бесконечности имеют, по определению, преобразования вида $z \mapsto az + b$; если отождествить H с единичным кругом, то необходимость в оговорке исчезнет.

Доказательство леммы 2. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению $z = (az+b)/(cz+d) \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Его дискриминант равен $(d-a)^2 + 4bc$. Если дискриминант положителен, то оно имеет два корня на вещественной оси, если равен нулю — один корень, а если отрицателен — два комплексно сопряженных корня, ровно один из которых лежит в верхней полуплоскости. $\square$

Преобразования $\sigma \in L$ не имеют неподвижных точек в H, то есть группа L состоит только из гиперболических и параболических преобразований. Поскольку $L = \mathbb{Z}^2$, она порождена двумя коммутирующими образующими u и v. Преобразование v должно переводить неподвижные точки преобразования u (лежащие в ∂H) в себя, причем нетрудно показать, что менять их местами оно не может. Поэтому группа L сохраняет прямую Лобачевского, проведенную через неподвижные точки u. Без ограничения общности эта прямая есть мнимая полуось (неподвижные точки $z = 0$ и $z = \infty$), откуда следует, что $u(z) = az$ и $v(z) = bz$ для некоторых $a, b > 0$. Но тогда фактор H/L не может быть компактен. $\square$