ЛЕКЦИЯ 9

Теорема 1. *Голоморфные 1-формы на всякой кривой рода 1 образуют одномерное векторное пространство (над $\mathbb{C}$). Всякая такая форма (кроме нулевой) не имеет нулей. Обратно, компактная комплексная кривая, на которой имеется 1-форма без нулей, имеет род 1.*

Доказательство. По теореме 2 лекции 8 кривая рода 1 есть $X = \mathbb{C}/L$. На $\mathbb{C}$ существует голоморфная 1-форма $\omega = dz$; она не имеет нулей. Очевидно, форма ω инвариантна при параллельных переносах, в частности, $g^*\omega = \omega$ при каждом $g \in L$. Следовательно, $\omega = \pi^*\nu$, где ν — 1-форма без нулей на $\mathbb{C}/L$, а $\pi : \mathbb{C} \to X$ — отображение факторизации.

Пусть ν_1 — другая 1-форма. Поскольку X — комплексная кривая, $\dim_{\mathbb{C}} T_a^{(1;0)}X = 1$, откуда вытекает, что ненулевой вектор $\nu(a) \in T_a^{(1;0)}X$ образует в этом пространстве базис. Таким образом, имеет место равенство $\nu_1(a) = f(a)\nu(a)$, где f — голоморфная функция и, следовательно, константа.

Пусть теперь X — компактная комплексная кривая, и ν — голоморфная 1-форма на ней, не имеющая нулей. Тогда не имеет нулей и гладкая вещественнозначная 1-форма $\operatorname{Re}\nu$. Действительно, если $\operatorname{Re}\nu(a)(v) = 0$ для какого-либо $a \in X$ и всех $v \in T_aX$, то в силу равенства $\nu(a)(iv) = i\nu(a)(v)$ получим $\nu(a) = 0$. Тем самым на компактном двумерном ориентированном многообразии X имеется векторное поле без нулей; согласно теореме Хопфа об эйлеровой характеристике это возможно только если $\chi(X) = 0$, то есть X — сфера с 1 ручкой. □

Пример 1. Рассмотрим риманову поверхность A функции $\sqrt{P(x)}$, где $P(x) = (x - q_1)(x - q_2)(x - q_3)$, и корни q_1, q_2, q_3 попарно различны. Напомним, что A получена добавлением конечного множества точек к некомпактной кривой $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x), x \neq q_1, q_2, q_3\}$. На кривой A_0 определены, таким образом, голоморфные функции x и y; они обе продолжаются до голоморфных отображений $x, y : A \to \mathbb{C}P^1$, т.е. до мероморфных функций на X. Накрытие $x : A \to \mathbb{C}P^1$ — двулистное, разветвленное над точками $x = q_1$, $x = q_2$, $x = q_3$ и $x = \infty$, всего точек 4. Порядок разветвления равен 2 (больше быть не может при двулистном накрытии). Отсюда по формуле Римана–Гурвица заключаем, что род A равен 1.

В данном случае на A можно явно указать не обращающуюся в нуль голоморфную 1-форму – это форма $\nu = dx/y$. Действительно, эта форма мероморфна, и в точках $a \in A_0$ не имеет не нулей, ни полюсов. В окрестности точки (единственной) $r_i = x^{-1}(q_i) \in A$ $(i = 1, 2, 3)$ имеем $\nu = dy/P'(x)$, а поскольку $P'(q_i) \neq 0$ (многочлен не имеет кратных корней), форма продолжается и в точку r_i и не обращается в ней в нуль. Поскольку порядок разветвления над $x = \infty$ равен 2, в окрестности точки $r_\infty = x^{-1}(\infty)$ на A имеется координата z такая, что $x = 1/z^2$; тогда $y = z^3/h(z)$, где $h(z)$ — одна из ветвей $\sqrt{(1 - q_1z)(1 - q_2z)(1 - q_3z)}$ (какая именно, зависит от выбора координаты z). Тогда $dx/y = -2dz/z^3 \cdot z^3/h(z) = -2dz/h(z)$ — в точке $z = 0$ определена и не обращается в нуль.

Предложение 1. *На компактной комплексной кривой X положительного рода не существует мероморфной функции с единственным полюсом порядка 1.*

Доказательство. Если такая функция f существует, то она является голоморфным отображением $f : X \to \mathbb{C}P^1$. Поскольку полюс единственный, точка $\infty \in \mathbb{C}P^1$ имеет единственный прообраз. Поскольку полюс порядка 1, это верно также и для точек, достаточно близких к ∞. Следовательно, f является накрытием степени 1 — следовательно, неразветвленным — следовательно, гомеоморфизмом, вопреки предположению о положительности рода. □

Рассмотрим теперь в $\mathbb{C}$ решетку L и функцию $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{u \in L\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2}\right)$.

Предложение 2. *Ряд для $\wp(z)$ сходится равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}\setminus L$. Функция $\wp(z)$ периодична с решеткой периодов L (то есть $\wp(z + v) = \wp(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, $v \in L$), мероморфна, имеет полюс порядка 2 во всех точках $z \in L$, и больше полюсов не имеет.*

Доказательство. Как нетрудно убедиться, $\left|\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2}\right| = O(\frac{1}{|u|^3})$ при $|u| \to \infty$ равномерно по z на любом компакте в $\mathbb{C}\setminus L$. Поскольку $\int_{x^2+y^2 \geq R^2} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ сходится, из интегрального признака сходимости вытекает абсолютная сходимость ряда и голоморфность $\wp(z)$ во всех точках $z \in \mathbb{C} \setminus L$.

Равномерно сходящийся ряд можно дифференцировать: $\wp'(z) = -2\sum_{u\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-u)^3}$. Этот ряд, очевидно, сходится абсолютно, так что его сумма периодична с решеткой периодов L: $\wp'(z + v) = \wp'(z)$ для всех z при $v \in L$. Отсюда вытекает, что $\wp(z) - \wp(z + v) = C_v$ для некоторой константы C_v. Пусть η_1, η_2 — образующие решетки L. Функция $\wp(z)$, очевидно, четная, откуда $\wp(\eta_1/2) = \wp(-\eta_1/2) = \wp(-\eta_1/2) + C_{\eta_1}$ — следовательно, $C_{\eta_1} = 0$, и аналогично для η_2. Следовательно, η_1 и η_2 — периоды функции $\wp(z)$ — следовательно, вся решетка L тоже.

Сумма по $u \in L \setminus \{0\}$ в определении функции $\wp(z)$ сходится равномерно в окрестности точки $z = 0$ — следовательно, в точке $z = 0$ функция $\wp(z)$ имеет полюс порядка 2. В силу периодичности такой же полюс есть в любой точке решетки; вне точек решетки функция $\wp(z)$ голоморфна. □

Предложение 3. *Функция $\wp'(z)$ периодична с решеткой периодов L, мероморфна, имеет полюс порядка 3 в каждой точке решетки и других полюсов не имеет. Она имеет простые нули в точках $u \in \mathbb{C}$ таких, что $2u \in L$, но $u \notin L$.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предложения 2. Пусть теперь $2u \in L$, но $u \notin L$. Тогда $\wp'(-u) = -\wp'(u)$ в силу нечетности, но $\wp'(-u) = \wp'(u)$ в силу периодичности. Следовательно, $\wp'(u) = 0$.

Рассмотрим теперь $\wp'$ как мероморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. как голоморфное отображение $\wp' : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}P^1$. Поскольку полюс единствен по модулю решетки, $(\wp')^{-1}(\infty)$ состоит из одной точки. Поскольку полюс имеет порядок 3, $(\wp')^{-1}(a)$ состоит из 3 точек при $a \in \mathbb{C}P^1$, близком к ∞. Следовательно, $\wp'$ — отображение степени 3. На эллиптической кривой $\mathbb{C}/L$ имеется 3 точки u, для которых $2u = 0$, но $u \neq 0$ (это точки $\eta_1/2$, $\eta_2/2$ и $(\eta_1 + \eta_2)/2$, где η_1, η_2 — образующие решетки L); поскольку $(\wp')^{-1}(0)$ не может содержать более 3 точек, больше нулей функция $\wp'$ не имеет. □

Теорема 2. *Числа $e_1 = \wp(\eta_1/2)$, $e_2 = \wp(\eta_2/2)$ и $\wp((\eta_1 + \eta_2)/2)$ попарно различны. Функция $\wp$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3 доказывается, что $\wp : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}P^1$ — разветвленное накрытие степени 2. Поскольку $\wp'(\eta_1/2) = 0$, прообраз $\wp^{-1}(\wp(\eta_1/2)) = \wp^{-1}(e_1)$ состоит из 1 точки. Аналогично для e_2, e_3 — следовательно, эти числа попарно различны.

Функции $(\wp'(z))^2$ и $4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$ — мероморфные на $\mathbb{C}/L$, имеют единственный полюс порядка 6 в точке 0, и по 3 нуля порядка 2 — в точках $\eta_1/2$, $\eta_2/2$ и $(\eta_1 + \eta_2)/2$. Поэтому их отношение — голоморфная функция на $\mathbb{C}/L$, то есть константа. Старший член ряда Лорана в точке 0 у обеих функций одинаковый — равен $4/z^6$, поэтому константа равна 1. □