ЭКЗАМЕН 15 МАЯ 2005 Г

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия, имя и отчество сдающего экзамен,* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО****.*
2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Задача 1. Вычислите $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx$, $n = 0, 1, \dots$.

Ответ: $\frac{\pi}{2^{2n}} C_{2n-1}^n$ при $n > 0$, $\pi/2$ при $n = 0$.

Задача 2. Опишите нули и особенности функции $y - x^2$ на римановой поверхности уравнения $y^2 = x^4 - 1$. Для нулей и полюсов укажите порядок.

Ответ: Над $x = \infty$ риманова поверхность имеет 2 точки. Одна из них — нуль (устранимая особенность) порядка 2, вторая — полюс порядка 2.

Задача 3. Пусть $M = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$. Функция $f : M \to \mathbb{C}$ голоморфна и обладает двумя свойствами: $|f(z)| < 1$ и $f'(z) \neq 0$ при всех $z \in M$. Докажите, что $|f'(i/2)| \leq \pi$.

Ответ: Отображение $\Psi(z) = e^{\pi z}$ — биголоморфный автоморфизм M и верхней полуплоскости, обратное отображение $\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \ln z$. Композиция $g = f \circ \Phi$ — отображение верхней полуплоскости на единичный круг; наибольшее значение $|g'(i)|$ достигается, когда отображение — сюръекция, переводящая i в центр круга, например, $g(z) = (z-i)/(z+i)$; в этом случае $|g'(i)| = 1$. Но $i = \Psi(i/2)$, откуда $g'(i) = \Phi'(i) f'(i/2) = f'(i/2)/\pi$.

Задача 4. Докажите, что при любом достаточно большом (по модулю) $a \in \mathbb{C}$ уравнение $e^z = az$ имеет а) единственное решение в единичном круге, б) бесконечно много решений во всем $\mathbb{C}$.

Ответ: При достаточно большом a имеем на границе единичного круга $|e^z| \ll |az|$, откуда вытекает, что индекс (число оборотов вокруг нуля) функции $az - e^z$ такой же, как и у функции az, то есть равен 1. Поскольку фунция целая (полюсов нет), по принципу аргумента в единичном круге имеется единственный нуль. Количество нулей во всем $\mathbb{C}$ бесконечно по теореме Пикара — функция e^z/z имеет на бесконечности существенную особенность и поэтому принимает значение a бесконечно много раз.

Задача 5. Пусть γ — единичная окружность с центром в начале координат. а) При каких $z \in \mathbb{C}$ сходится интеграл $f(z) = \int_\gamma \frac{\bar{w}\,dw}{w-z}$? б) Найдите область голоморфности и опишите особенности (включая устранимые) функции f.

Ответ: Интеграл сходится при $|z| \neq 1$ (то есть когда z не лежит на контуре интегрирования). Функция $f(z)$ равна $2\pi i/z$, то есть имеет во всех точках единичной окружности устранимые особенности, а в нуле — полюс первого порядка.