ЭКЗАМЕН 19–26 СЕНТЯБРЯ 2005 Г

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия, имя и отчество сдающего экзамен,* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО****.*
2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова “Ответ”, за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Готовые работы нужно сдать в учебную часть до 21.00 26 сентября 2005 г.

Задача 1. Пусть f — взаимно однозначное голоморфное отображение эллипса на единичный круг. а) Докажите, что образ самой длинной хорды эллипса при отображении f — отрезок или дуга окружности. б) Покажите, что для произвольной хорды эллипса это может быть неверно.

Задача 2. Пусть f — многочлен с двумя критическими значениями: 0 и 1 (то есть если $f'(z) = 0$, то $f(z) = 0$ или 1). а) Докажите, что множество $f^{-1}([0,1]) \subset \mathbb{C}$ представляет собой вложенное дерево, то есть связный граф без циклов, ребра которого — отрезки гладких кривых. б) Приведите пример многочлена f, для которого это дерево такое:

Задача 3. Пусть $n \geq 0$ и Θ_n — линейное пространство голоморфных функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих тождествам $f(z+1) = f(z)$ и $f(z+i) = -e^{2\pi i n z} f(z)$. а) Докажите, что $\dim \Theta_n = n$ при $n \geq 0$ и $\dim \Theta_n = 0$ при $n < 0$. б) Докажите, что каждая функция $f \in \Theta_n$ имеет в квадрате $0 \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z < 1$ ровно n нулей, считая с кратностями. в) Найдите сумму этих нулей.

Задача 4. а) Все корни многочлена лежат в верхней полуплоскости. Докажите, что все корни его производной также лежат в верхней полуплоскости. б) Докажите, что корни производной многочлена лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена.