НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 1.
Кривые и поверхности. 7.02.2005

Задача 1. Доказать, что кривизна плоской кривой $\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$, где t — произвольный параметр, может быть найдена

а) по формуле $k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$.

б) по формуле

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}. \tag{1}$$

Задача 2. Доказать, что при кривизна пространственной кривой $\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$, где t — произвольный параметр, может быть найдена по формуле (1), а кручение — по формуле $\varkappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}$.

Задача 3. Найти кривизну и кручение кривой $\mathbf{r}(t) = e^t(\sin t, \cos t, 1)$.

Задача 4. а) Доказать, что если кривизна кривой тождественно равна нулю, то это прямая.

б) Доказать, что если кручение кривой тождественно равно нулю, то эта кривая лежит в плоскости.

Задача 5. Доказать, что кривая лежит на сфере радиуса R тогда и только тогда, когда $R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right)$

Задача 6. Доказать, что кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, — окружность.

Задача 7. Описать кривые с

а) постоянным кручением,

б) постоянными кривизной и кручением,

в) пропорциональными кривизной и кручением: $k = const \cdot \varkappa$.

Задача 8*. Доказать, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.

Задача 9*. Доказать, что для замкнутой гладкой кривой $\int(\mathbf{r}\,dk + \varkappa\mathbf{b}\,dl) = 0$, где l — натуральный параметр.

Задача 10. Написать параметрическое уравнение тора вращения и найти индуцированную метрику.

Задача 11. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса.

Задача 12. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для поверхности вращения $\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi)$. Что будет в частном случае $x(u) = \pm\left(a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \sqrt{a^2-u^2}\right)$, $a > 0$ (поверхности Бельтрами)?

Задача 13. Доказать, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами есть плоскость.

Задача 14. Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $(\frac{\mathrm{ch}(at+b)}{a}, t)$.

Задача 15*. Доказать, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн $H = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(\varphi)\,d\varphi$, где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ, отсчитываемом от одного из главных направлений.