НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10.
Когомологии де Рама. 11.04.2005

Замечание. Под когомологиями везде понимаются когомологии де Рама.

Задача 1. Найти непосредственно (не прибегая к последовательности Майера-Виеториса) когомологии тора $\mathbb{T}^n$.

Задача 2. *(Лемма о пяти гомоморфизмах).* Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle a} & & \big\downarrow{\scriptstyle b} & & \big\downarrow{\scriptstyle c} & & \big\downarrow{\scriptstyle d} & & \big\downarrow{\scriptstyle e} & & \\
\ldots & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

из абелевых групп и их гомоморфизмов, такую что горизонтальные стрелки образуют две точные последовательности. Докажите, что если a, b, d, e являются изоморфизмами, то c тоже изоморфизм.

Задача 3. Найти когомологии $\mathbb{RP}^n$.

Задача 4. Найти когомологии $\mathbb{CP}^n$.

Задача 5*. Найти кольцо когомологий $\mathbb{CP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{CP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях).

Задача 6. Найти когомологии двумерной сферы с g приклеенными ручками.

Задача 7. Найти когомологии двумерной сферы с μ вклеенными листами Мебиуса.

Задача 8. Найти когомологии $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1$ (дополнение к окружности в трехмерном пространстве).

Задача 9. Найти когомологии $\mathbb{S}^3 \backslash \mathbb{S}^1$ (дополнение к окружности в трехмерной сфере).

Задача 10*. *(Формула Кюннета).* Доказать, что

$$H^*(M_1) \otimes H^*(M_2) = H^*(M_1 \times M_2),$$

то есть

$$\bigoplus_{k_1+k_2=k} H^{k_1}(M_1) \otimes H^{k_2}(M_2) = H^k(M_1 \times M_2).$$

Достаточно рассматривать где надо только многообразия конечного типа, чтобы можно было воспользоваться принципом Майера-Виеториса.

Задача 11. Найти с помощью формулы Кюннета когомологии тора $\mathbb{T}^n$.