НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 11.
Когомологии де Рама. 18.04.2005

Замечание. Под когомологиями везде понимаются когомологии де Рама.

Задача 1. Пусть $\Omega_c^k(X)$ обозначает пространство дифференциальных k-форм с компактным носителем на X. Если $j : X \hookrightarrow Y$ вложение открытого множества, то существует естественное отображение $\Omega_c^*(X) \xrightarrow{j_*} \Omega_c^*(Y)$, которое просто продолжает формы с X на $Y \setminus X$ нулем. Докажите, что естественные вложения

$$\begin{tikzcd} M & U \amalg V \arrow[l] & U \cap V \arrow[l, bend right, "j^U"'] \arrow[l, bend left, "j^V"] \end{tikzcd},$$

где, например, j^U есть естественное вложение $U \cap V \subset U$, дают точную последовательность

$$0 \longleftarrow \Omega_c^*(M) \xleftarrow{i_*} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xleftarrow{\delta} \Omega_c^*(U \cap V) \longleftarrow 0,$$

где i_* есть сумма форм, а δ есть отображение $\omega \mapsto (-j_*^U \omega, j_*^V \omega)$. Выведите из этого соответствующую длинную точную последовательность (последовательность Майера-Виеториса для когомологий де Рама с компактным носителем).

Задача 2*. Докажите лемму Пуанкаре для когомологий с компактным носителем:

$$H_c^k(M \times \mathbb{R}^1) = H_c^{k-1}(M).$$

Указание. Рассмотрите отображение послойного интегрирования

$$\pi_* : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega_c^{k-1}(M),$$

которое формы без dt переводит в ноль, а формы с dt интегрирует $\int_{\mathbb{R}^1}$. Пусть $e = e(t)dt$ такая форма с компактным носителем на $\mathbb{R}^1$, что $\int_{\mathbb{R}^1} e = 1$. Рассмотрите отображение

$$e_* : \Omega_c^{k-1}(M) \longrightarrow \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1),$$

это просто операция умножения на e. В качестве оператора гомотопии рассмотрите оператор

$$K : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega_c^{k-1}(M \times \mathbb{R}^1),$$

который переводит формы без dt в ноль, а формы с dt он преобразует так:

$$\omega \mapsto \int_{-\infty}^{t} \omega - \int_{-\infty}^{t} e \int_{-\infty}^{+\infty} \omega.$$

Задача 3. Найдите когомологии с компактным носителем листа Мебиуса.