НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 2.
Поверхности в n-мерном евклидовом пространстве.
Ковариантная производная касательных и нормальных векторов.
Параллельный перенос. 14.02.2005

Задача 1. Доказать, что коммутатор двух касательных к поверхности векторных полей снова будет касательным векторным полем.

Задача 2*. Доказать первое структрурное уравнение Картана

$$d\,e^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta,$$

где e^α — базис, дуальный к выбранному базису e_α пространства касательных векторных полей.

Задача 3. Найти оператор Вейнгартена и ковариантные производные для

а) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и

б) тора вращения в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4*. (для любителей большого счёта) Ввести стереографические координаты на $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ и найти в них все объекты нами изученные (метрику, вторую квадратичную форму, оператор Вейнгартена, ковариантные производные касательных и нормальных полей).

Задача 5. Доказать, что

$$\nabla_X Y(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi_{x+\varepsilon X \mapsto x} Y(x+\varepsilon X) - Y(x)}{\varepsilon}$$

Задача 6. Доказать, что если две поверхности касаются вдоль кривой, то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Задача 7. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой?

Задача 8. На какой угол повернется касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \theta$ на угол φ?

Задача 9. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.