НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 5.
Группы и алгебры Ли. Векторные расслоения. 7.03.2005

Задача 1. Доказать, что прямое произведение групп Ли является группой Ли. Как найти соответствующую алгебру Ли?

Задача 2. Доказать, что группа Ли всегда ориентируема.

Задача 3. Доказать, что если U — некая окрестность единицы в связной группе Ли G, то $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U^n = G$, где U^n означает множество всех произведений из n элементов U.

Задача 4. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Доказать, что если коммутатор любых элементов $\mathfrak{g}$ равен нулю, то G абелева (поэтому алгебры Ли с нулевым коммутатором называются абелевыми).

Задача 5. Постройте естественные гомоморфизмы групп Ли

а) $SU(2) \longrightarrow SO(3)$,

б) $SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SO(4)$.

Задача 6. Доказать, что компонента связности единицы является подгруппой Ли.

Задача 7. Найти число компонент связности для

а) $GL(n,\mathbb{R})$,

б) $GL(n,\mathbb{C})$,

в) $O(n)$,

г) $SO(n)$,

д) $U(n)$,

е) $SU(n)$.

Задача 8. Являются ли тривиальными касательные расслоения

а) TS^1,

б) TS^2,

в) TS^3?

Задача 9. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение.

Задача 10. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их произведение — тривиальное расслоение.