НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 6.
Векторные расслоения. 14.03.2005

Задача 1*. Пусть $f : M \longrightarrow N$ — гладкое сюръективное отображение компактного многообразия M в связное многообразие N, такое что дифференциал этого отображения $df : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ является эпиморфизмом в любой точке x. Доказать, что тогда $M \xrightarrow{f} N$ является локально тривиальным расслоением.

Задача 2. Пусть $E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное векторное расслоение ранга k. Доказать, что тривиальность этого расслоения эквивалентна существованию k линейно независимых в любой точке глобальных сечений этого расслоения.

Задача 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ состоит из таких пар (l, v), что если рассмотреть $l \in \mathbb{R}P^n$ как прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $v \in l$. Пусть $p : E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ — естественная проекция. Доказать, что $E \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$ — гладкое векторное локально тривиальное расслоение ранга 1 и найти его склеивающие коциклы при выборе стандартных аффинных подмножеств $\mathbb{R}P^n$ в качестве тривиализирующего покрытия. Это расслоение называется универсальным или тавтологическим расслоением над $\mathbb{R}P^n$.

Задача 4. Построить аналогично универсальное (или тавтологическое) расслоение над многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$ и найти его склеивающие коциклы.

Задача 5. Пусть Y — подмногообразие X. Тогда для каждой точки $x \in Y$ можно определить векторное пространство $N_x := T_xX/T_xY$. Определите на дизъюнктном объединении $NY = \bigsqcup_{x \in Y} N_x$ естественную структуру гладкого многообразия и локально тривиального векторного расслоения над Y. Это расслоение называется нормальным расслоением.

Задача 6*. Доказать, что если база расслоения стягиваема, то расслоение тривиально.