НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 8.
Связности в векторных расслоениях. 28.03.2005

Задача 1. Пусть ∇^1 и ∇^2 связности в векторных расслоениях $E_1 \longrightarrow M$ и $E_2 \longrightarrow M$ соответственно.

а) Доказать, что $\nabla^1 \oplus \nabla^2$ определенная как $\nabla^1 \oplus \nabla^2(s_1 + s_2) = \nabla^1 s_1 + \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \oplus E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \oplus \nabla^2$.

б) Доказать, что $\nabla^1 \otimes \nabla^2$ определенная как $\nabla^1 \otimes \nabla^2(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \otimes E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \otimes \nabla^2$.

в) Пусть $\langle , \rangle$ естественное спаривание сечений E_1 и двойственного ему расслоения E_1^*. Определим операцию ∇^* из условия, что тождество

$$d\langle s, t\rangle = \langle \nabla^1 s, t\rangle + \langle s, \nabla^* t\rangle$$

верно для любых $s \in \Gamma(M, E_1)$, $t \in \Gamma(M, E_1^*)$. Докажите, что это связность в E_1^*. Найти локальную 1-форму этой связности.

г) Связность в расслоении $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ можно ввести с помощью изоморфизма $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2$ и предыдущих пунктов. Проверьте, что это то же самое, что определить эту связность формулой $(\nabla f)(s_1) = \nabla^2(f(s_1)) - f(\nabla^1 s_1)$, где $f \in \Gamma(M, \mathrm{Hom}(E_1, E_2))$, $s_1 \in \Gamma(M, E_1)$.

Задача 2. Пусть $\phi : N \longrightarrow M$ гладкое отображение, а ∇^E связность в векторном расслоении $E \longrightarrow M$. Докажите, что равенство

$$\nabla^{\phi^* E}(f \phi^* s) = df \otimes \phi^* s + f \phi^*(\nabla^E s),$$

где $f \in C^\infty(N)$, $s \in \Gamma(M, E)$, определяет связность $\nabla^{\phi^* E}$ на расслоении $\phi^* E$ (обратный образ связности).

Задача 3. Заметим, что важно, что $\nabla s = dx^i \otimes \nabla_i s$, где $s \in \Gamma(M, E)$, а не $\nabla s = dx^i \wedge \nabla_i s$, последняя формула неверна и, для произвольного расслоения, не имеет смысла. Но есть случай, когда операция $\nabla \wedge s := dx^i \wedge \nabla_i s$ тоже интересна.

Пусть у нас есть симметрическая (то есть с нулевым кручением) связность в TM. Распространим эту связность на расслоение внешних форм. Теперь рассмотрим операцию $\nabla \wedge s := dx^i \wedge \nabla_i s$ (где мы смотрим на s как на сечение $\Lambda T^* M$, а не как на форму со значениями в сечениях). Докажите, что тогда $\nabla \wedge s$ есть просто ds (обычный внешний дифференциал). Что будет для несимметрической связности?

Задача 4. Пусть у нас есть связность ∇ в расслоении E. Продолжим ее до связности $\nabla^{\mathrm{End}(E)}$ в расслоении $\mathrm{End}(E)$. Докажите тождество Бьянки:

$$\nabla^{\mathrm{End}(E)} F = 0.$$

Перепишите это как соотношение на кривизну и 1-форму связности.