НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.
Связности, римановы многообразия. 4.04.2005

Задача 1. Используя задание универсального расслоения над многообразием Грассмана с помощью проектора (см. задачу 4 листка 7), найти связность и кривизну связности, построенной по этому проектору.

Задача 2*. Пусть у нас есть симметричная связность, согласованная с данной эрмитовой метрикой. Докажите, что связность согласована с комплексной структурой (то есть параллельный перенос — унитарное преобразование) тогда и только тогда, когда метрика кэлерова.

Задача 3. Фиксируем точку p на римановом многообразии M. Определим экспоненциальное отображение $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ как $\exp_p(\xi) = \gamma_\xi(1)$, где $\xi \in T_pM$, а $\gamma_\xi(t)$ геодезическая выходящая из p с вектором скорости ξ.

а) Докажите, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом достаточтно малой окрестности нулевого вектора касательной плоскости на свой образ.

б) Экспоненциальное отображение вводит так называемые геодезические координаты в окрестности p. Докажите, что в этих координатах в точке p символы Кристоффеля обращаются в ноль.

Задача 4. Найти все геодезические на плоскости Лобачевского. Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Задача 5. Для связности в касательном расслоении докажите следующие тождества.

а) первое структурное уравнение Картана

$$de^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta + \theta^\alpha,$$

б) второе структурное уравнение Картана

$$d\Gamma^\beta_\alpha = \Gamma^\gamma_\alpha \wedge \Gamma^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha,$$

в) первое тождество Бьянки

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta - e^\beta \wedge \Omega^\alpha_\beta,$$

г) второе тождество Бьянки

$$d\Omega^\beta_\alpha = \Gamma^\gamma_\alpha \wedge \Omega^\beta_\gamma - \Omega^\gamma_\alpha \wedge \Gamma^\beta_\gamma,$$

где e^α дуальный базис, Γ^α_β локальная 1-форма связности, Ω^β_α локальная 2-форма кривизны, θ^α локальная 2-форма кручения.

Задача 6. Рассмотрим на $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ метрику, являющуюся ограничением метрики $ds^2 = dz\, d\bar{z}^T - (z\, d\bar{z}^T)(\bar{z}\, dz^T)$, где z рассматривается как вектор-строка.

а) Докажите, что она индуцирует метрику на $\mathbb{C}P^n$, эта метрика называется метрикой Фубини-Штуди.

б) Докажите, что метрика Фубини-Штуди кэлерова.