НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 22.05.2005

Задача 1. Пусть K и H являются гауссовой и средней кривизной поверхности соответственно, причем мы придерживаемся определения, при котором H есть *сумма* главных кривизн, а не полусумма. Докажите, что $H^2 \geqslant 4K$. Охарактеризуйте те точки, в которых выполнено равенство $H^2 = 4K$. *(5 баллов).*

Задача 2. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Доказать, что сумма $T(\mathbb{R}P^n)$ и тривиального расслоения ранга 1 изоморфна $\underbrace{E^* \oplus \cdots \oplus E^*}_{\text{n+1}}$. *(10 баллов).*

Задача 3. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Рассмотрим расслоение $\operatorname{Ann} E$, слой которого над точкой x состоит из ковекторов, принимающих нулевое значение на прямой E_x. Построить связность на расслоении $\operatorname{Ann} E$ и вычислить форму кривизны. *(7 баллов).*

Задача 4. Найдите когомологии группы Ли $U(2)$. *(5 баллов).*

Задача 5. Найдите $\operatorname{ch}(\xi_k)$, где ξ_k есть тривиальное расслоение ранга k. *(3 балла).*

Задача 6. Докажите, что $\mathbb{CP}^2$ не может быть краем какого-либо компактного ориентируемого многообразия. *(20 баллов).*