НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Зачет. 16.05.2005

Замечание. Для получения зачета необходимо по каждой из основных тем (кривые и поверхности, расслоения, связности, когомологии, характеристические классы) решить хотя бы пару задач и продемонстрировать в процессе ответа понимание темы. *Просьба воздержаться от коллективного решения задач!*

Кривые и поверхности.

Задача 1. Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $(\frac{\mathrm{ch}(at+b)}{a}, t)$.

Задача 2. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой?

Задача 3. Доказать, что перепараметризации геодезических будут экстремалями функционала длины $L = \int |\dot{x}(t)|\, dx$.

Задача 4. Найдите на круговом конусе самопересекающиеся геодезические.

Расслоения.

Задача 5. Являются ли тривиальными касательные расслоения а) TS^1, б) TS^2, в) TS^3?

Задача 6. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение.

Задача 7. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их произведение — тривиальное расслоение.

Задача 8. Пусть $V_k(\mathbb{R}^N) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^N)$ естественное расслоение многообразия Штифеля над многообразием Грассмана. Каков его слой? Найти соответствующее ассоциированное векторное расслоение (то есть векторное расслоение с теми же склеивающими коциклами).

Задача 9. Докажите, что сумма касательного расслоения к двумерной сфере и тривиального расслоения ранга 1 является тривиальным расслоением ранга 3.

Задача 10. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Доказать, что сумма $T(\mathbb{R}P^n)$ и тривиального расслоения ранга 1 изоморфна $\underbrace{E^* \oplus \cdots \oplus E^*}_{\text{n+1}}$.

Задача 11*. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Тривиально ли $E \otimes E$?

Связности.

Задача 12. Пусть у нас есть связность ∇ в расслоении E. Продолжим ее до связности $\nabla^{\mathrm{End}(E)}$ в расслоении $\mathrm{End}(E)$. Докажите тождество Бьянки:

$$\nabla^{\mathrm{End}(E)} F = 0.$$

Перепишите это как соотношение на кривизну и 1-форму связности.

Задача 13. Фиксируем точку p на римановом многообразии M. Определим экспоненциальное отображение $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ как $\exp_p(\xi) = \gamma_\xi(1)$, где $\xi \in T_pM$, а $\gamma_\xi(t)$ геодезическая выходящая из p с вектором скорости ξ.

а) Докажите, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом достаточно малой окрестности нулевого вектора касательной плоскости на свой образ.

б) Экспоненциальное отображение вводит так называемые геодезические координаты в окрестности p. Докажите, что в этих координатах в точке p символы Кристоффеля обращаются в ноль.

Задача 14. Найти все геодезические на плоскости Лобачевского. Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Когомологии.

Задача 15. Найти когомологии $\mathbb{CP}^n$.

Задача 16. Найти когомологии двумерной сферы с g приклеенными ручками.

Задача 17*. *(Формула Кюннета).* Доказать, что

$$H^*(M_1) \otimes H^*(M_2) = H^*(M_1 \times M_2),$$

то есть

$$\bigoplus_{k_1+k_2=k} H^{k_1}(M_1) \otimes H^{k_2}(M_2) = H^k(M_1 \times M_2).$$

Достаточно рассматривать где надо только многообразия конечного типа, чтобы можно было воспользоваться принципом Майера-Виеториса.

Задача 18. Найти с помощью формулы Кюннета когомологии тора $\mathbb{T}^n$.

Задача 19. Найдите когомологии с компактным носителем листа Мебиуса.

Характеристические классы.

Задача 20. Для ориентированной гиперповерхности в евклидовом пространстве $M^{2n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы.

Задача 21. Докажите, что если у комплексного расслоения ξ есть k не обращающихся в ноль и независимых в каждой точке сечений, то $c_n(\xi) = 0$, $\ldots$, $c_{n-k+1}(\xi) = 0$.

Задача 22. Докажите, что если у ориентированного вещественного расслоения η есть не обращающееся в ноль сечение, то $\chi(\eta) = 0$.

Задача 23. Пусть ξ комплексное расслоение, $\operatorname{rk}\xi = k$, а $S^2\xi \subset \xi \otimes \xi$ его симметрический квадрат. Найдите $c_1(S^2\xi)$.

Задача 24. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M равны нулю.