Теория Меры 8: Задачи для экзамена

Листочек называется сданным, если сданы все задачи без звездочки (кроме, быть может, трех), либо больше 4/5 задач со звездочкой и восклицательным знаком. Чтобы сдать экзамен, нужно непосредственно на экзамене решить $2n$ задач, где n - число несданных листков. Если задача относится к несданному листку, она засчитывается за две.

8.1. Задачи к листку 1

Задача 8.1. Рассмотрим кольцо R многоугольников в $\mathbb{R}^2$ (кольцо, порожденное замкнутыми треугольниками). Пусть на R задана функция λ со значениями в $[0, \infty[$, удовлетворяющая следующим свойствам

а. $\lambda(I) = 0$, где I это отрезок, интервал или полуинтервал

б. $\lambda(A) = \lambda(B)$, если A может быть получено из B параллельным переносом.

в. λ аддитивна: $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

Докажите, что λ задается этими свойствами однозначно, с точностью до постоянного множителя.

Задача 8.2. Выведите свойство а. предыдущей задачи из б.

Задача 8.3. Пусть L есть плоскость Лобачевского (плоскость, заданная аксиомами Евклида, где постулат о существовании и единственности параллельной прямой, проходящей через заданную точку, заменен на утверждение "сумма углов треугольника строго меньше π"). Определим объем выпуклого n-угольника N как $(n-2)\pi - \alpha$, где α это сумма углов N. Докажите, что эта функция продолжается до аддитивной функции λ на кольце многоугольников, со значениями в $[0, \infty[$. Для каких многоугольников $\lambda(N)$ равна сумме углов N?

8.2. Задачи к листку 2

Задача 8.4. Дана булева алгебра A. Рассмотрим множество $Spec(A)$ всех максимальных идеалов A. Для каждого $a \in A$, рассмотрим подмножество $U_a \subset Spec(A)$, состоящее из всех идеалов, не содержащих a. Определим на $Spec(A)$ топологию, с базой, состоящей из всех U_a. Докажите, что $Spec(A)$ хаусдорфово и вполне несвязно (не содержит связных подмножеств, кроме точки).

Задача 8.5. Для любого $a \in A$, рассмотрим функцию на $f_a : \ Spec(A) \longrightarrow \{0, 1\}$, ставящую 1 в соответствие идеалу, не содержащму a, и 0 в соответствие идеалу, содержащему a. Докажите, что все функции f_a непрерывные, и любая непрерывная функция получается таким образом.

Задача 8.6. Докажите, что любая булева алгебра получается как алгебра, порожденная открытыми подмножествами в некотором хаусдорфовом, вполне несвязном пространстве. Докажите, что это пространство единственно.

8.3. Задачи к листку 3

Задача 8.7. Дана монотонно возрастающая последовательность $\{f_i\}$ интегрируемых функций на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что все f_i ограничены сверху некоторой интегрируемой функцией. Докажите, что $\sup f_i$ интегрируемая, и f_i сходится к $\sup f_i$ в топологии, заданной нормой $|f|_1$

Задача 8.8. Докажите, что поточечный предел измеримых функций измерим.

Задача 8.9. Приведите пример измеримой функции, которую нельзя получить как поточечный предел последовательности непрерывных функций.

8.4. Задачи к листку 4

Задача 8.10. Вещественнозначная функция f на отрезке называется **абсолютно непрерывной**, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что для любого набора непересекающихся интервалов $\{[a_i, b_i]\}$ с суммой длин, ограниченных δ, справедлива оценка $\sum |f(a_i) - f(b_i)| < \epsilon$. Докажите, что абсолютно непрерывная функция дифференцируема почти всюду, а ее производная интегрируема.

Задача 8.11. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ не существует измеримого множеества A такого, что $\mu(A \cup B) = 1/2\mu(B)$ для любого куба B (μ - мера Лебега).

Задача 8.12. Меры μ, ν называются **эквивалентными**, если μ абсолютно непрерывна относительно ν, а ν абсолютно непрерывна относительно μ. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана мера μ, такая, что для каждого сдвига $P: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $P_*\mu$ эквивалентна μ. Докажите, что μ эквивалентна мере Лебега.

8.5. Задачи к листку 5

Задача 8.13. Пусть μ - мера на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывная относительно меры Лебега. Всегда ли μ принадлежит классу C^1?

Задача 8.14. Докажите, что мера Лебега гладкая, и для любого векторного поля $\vec{v}$ заряд $\mathrm{Lie}_{\vec{v}}\,\mu$ абсолютно непрерывен относительно μ, где μ есть мера Лебега.

Задача 8.15. **Дивергенцией** $Div(\vec{v})$ называется функция f такая, что $f\mu = \mathrm{Lie}_{\vec{v}}\,\mu$. Для заданной гладкой функции f на $\mathbb{R}^n$, найдите векторное поле v такое, что $f = Div(\vec{v})$.

8.6. Задачи к листку 6

Задача 8.16. Пусть C есть пространство непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0, 1]$, с топологией, заданной нормой $|f|_2 = \sqrt{\int_{[0,1]} f^2\mu}$, ($\mu$ - мера Лебега на отрезке), а $L_2([0, 1])$ его пополнение по этой норме. Будет ли открытый шар в $L_2([0, 1])$ борелевским множеством?

Задача 8.17. Существует ли инвариантная относительно параллельных переносов ненулевая борелевская мера на $L_2([0, 1])$?

Задача 8.18. Найдите все инвариантные относительно параллельных переносов борелевские меры на p-адическом векторном пространстве $\mathbb{Q}_p^n$.

8.7. Задачи к листку 7

Задача 8.19. Найдите локально компактную хаусдорфову топологическую группу, у которой правая мера Хаара не пропорциональна левой.

Задача 8.20. Верно ли, что правая мера Хаара на компактной хаусдорфовой топологической группе G всегда пропорциональна левой?

Задача 8.21. Рассмотрим группу G обратимых верхнетреугольных матриц 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Отображение $A \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{22})$ отождествляет G и открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$, заданное условиями $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$. Докажите, что мера Хаара h на G абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ на $\mathbb{R}^3$. Найдите функцию f такую, что $h = f\mu$.