# Теория Меры 2: мера Лебега

## 2.1. Булевы алгебры

**Определение 2.1.** **Решетка** это множество $L$, наделенное алгебраическими бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$ : $L \times L \longrightarrow L$, которые удовлетворяют следующим условиям.

а. Идемпотентность: $a \wedge a = a \vee a = a$.

б. Коммутативность: $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$.

в. Ассоциативность: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,

г. Абсорбция: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

**Задача 2.1.** . Пусть $(S, \preceq)$ частично упорядоченное множество, такое, что для любых $x, y$, задана **точная верхняя грань** (такой элемент $(x \vee y) \succeq x, y$, что любой $z \succeq x, y$ удовлетворяет $z \succeq (x \vee y)$) и **точная нижняя грань** (такой элемент $(x \wedge y) \preceq x, y$, что любой $z \preceq x, y$ удовлетворяет $z \preceq (x \wedge y)$). Докажите, что это решетка.

**Задача 2.2 (!).** Пусть $L$ решетка. Введем на $L$ соотношение $x \preceq y$, если $x \wedge y = x$.

а. Докажите, что $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x \vee y = y$.

б. Докажите, что $x \preceq y$ есть соотношение частичного порядка

в. Рассмотрим $(L, \preceq)$ как частично упорядоченное множество. Докажите, что в нем есть точная верхняя и нижняя грань. Докажите, что они выражаются как $(x \vee y)$, $(x \wedge y)$.

г. Докажите, что любую решетку можно получить из частично упорядоченного множества способом, описанным в задаче 2.1.

**Задача 2.3.** Пусть $R$ факториальное кольцо. Постройте решетку, пользуясь операцией взятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

**Задача 2.4.** Рассмотрим такое соотношение частичного порядка на $2^S$: $x \preceq y$, если $x \subset y$. Докажите, что в $(2^S, \preceq)$ существуют точная верхняя и нижняя грань. Докажите, что соответствующие операции это пересечение и объединение множеств.

**Определение 2.2.** Булева алгебра это способ аксиоматизации операций пересечения и объединения в алгебре подмножеств. Булевы алгебры названы так по имени английского математика Джорджа Буля, 1815-1864.

**Булева алгебра** $(A, \vee, \wedge)$ это решетка, удовлетворяющая следующим условиям

а. Ограниченность снизу: в $A$ есть элемент 0 такой, что $x \wedge 0 = 0$.

б. Ограниченность сверху: в $A$ есть элемент 1 такой, что $x \vee 1 = 1$.

в. Дистрибутивность: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (a \wedge c)$

г. Существование дополнений: для любого $x \in A$ существует $\neg x$ такой, что $x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \neg x = 1$.

**Задача 2.5.** Докажите, что 0, 1, $\neg x$ однозначно определяются структурой решетки на $A$.

**Задача 2.6.** Докажите, что $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$.

**Задача 2.7.** Докажите законы де Моргана: $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$, $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$.

**Задача 2.8.** (двойственность булевых алгебр) Дана булева алгебра $(A, \vee, \wedge)$. Рассмотрим операции $\vee_1 := \wedge$, $\wedge_1 := \vee$. Докажите, что $(A, \wedge, \vee)$ это тоже булева алгебра.

**Задача 2.9.** Постройте булеву алгебру из двух элементов.

**Задача 2.10.** Пусть $R$ (коммутативное) кольцо, а $V$ множество идемпотентов (элементов, удовлетворяющих $a^2 = a$). Рассмотрим операции $e \vee f = e + f - ef$, $e \wedge f = ef$. Докажите, что это булева алгебра.

**Определение 2.3.** **Симметрическая разность** в булевой алгебре задается по формуле $a \triangle b := (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$

**Задача 2.11 (!).** а. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна.

б. Докажите, что операция $\wedge$ дистрибутивна относительно симметрической разности.

в. Докажите, что $(A, \wedge, \triangle)$ это кольцо (роль сложения выполняется $\triangle$, роль умножения - $\wedge$).

г. Докажите, что все элементы полученного кольца суть идемпотенты

**Задача 2.12 (!).** Дано коммутативное кольцо $R$ над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, все элементы которого суть идемпотенты. Рассмотрим структуру булевой алгебры на множестве идемпотентов, определенную в задаче 2.10. Докажите, что $R$ получается вышеописанным способом из этой булевой алгебры.

**Определение 2.4.** **Идеалом** булевой алгебры называется замкнутое относительно операции $\vee$ подмножество $I \subset A$, которое удовлетворяет $a \wedge i \in I$ для любого $a \in A, i \in I$.

**Задача 2.13.** Дана булева алгебра $A$, у которой больше двух элементов. Докажите, что в $A$ есть нетривиальный идеал.

**Задача 2.14 (!).** Пусть $(A, \wedge, \vee)$ булева алгебра, а $I \subset A$ идеал. Определим такое соотношение: $a \sim_I b$, если $a \triangle b \in I$. Докажите, что это соотношение эквивалентности. Докажите, что операции $\wedge$ и $\vee$ сохраняют классы эквивалентности, и индуцируют на множесте $A'$ классов эквивалентности структуру булевой алгебры.

**Определение 2.5.** В этих условиях $A'$ называется **факторалгеброй**, и обозначается $A/I$. Идеал называется **максимальным**, если фактор по нему - булева алгебра из двух элементов.

**Задача 2.15 (*).** Дан нетривиальный идеал булевой алгебры. Докажите, что он содержится в максимальном.

**Определение 2.6.** **Представлением**, или же **инъективным представлением** булевой алгебры $A$ называется инъективный гомоморфизм $A \longrightarrow 2^S$, определенный для какого-то множества $S$. Иначе говоря, представление булевой алгебры есть реализация ее в качестве подалгебры множеств.

**Задача 2.16 (*).** а. Докажите, что любая булева алгебра допускает инъективное представление.

6. Дана конечная булева алгебра. Докажите, что в ней $2^n$ элементов. Докажите, что она изоморфна алгебре всех подмножеств $S$, где $S$ конечное множество из $n$ элементов.

## 2.2. Внешняя мера

Вплоть до окончания этого листка, $S$ это множество, а $\mathfrak{U} \subset 2^S$ кольцо подмножеств, содержащее $S$ (такое кольцо называется **алгеброй подмножеств**, или же **подалгеброй подмножеств в** $2^S$). Рассмотрим $2^S$ как булеву алгебру, с операциями $\vee = \cup$ и $\wedge = \cap$. Очевидно, $\mathfrak{U}$ это булева подалгебра $2^S$

Рассмотрим функцию $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. На множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ определена операция сложения, таким образом, что $x + \infty = \infty$ и $\infty + \infty = \infty$.

**Определение 2.7.** Функция $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если для любых непересекающихся $A, B \in \mathfrak{U}$, $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Мера называется **неотрицательной**, если к тому же $\mu(A) \geq 0$, для любого $A$.

**Определение 2.8.** В этих предположениях, пусть $X \subset S$ любое подмножество. Определим **внешнюю меру** $\mu^*(X)$ как

$$\mu^*(X) := \inf_{\{A_i\}} \sum \mu(A_i)$$

где инфимум берется по всем счетным наборам $\{A_i\} \subset \mathfrak{U}$, покрывающим $X$. Мы говорим, что $X$ **множество меры 0**, если $\mu^*(X) = 0$. Мы говорим, что $\mu$ $\sigma$-аддитивна, если $\mu^*(A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathfrak{U}$.

**Задача 2.17.** Докажите, что $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

**Задача 2.18 (*).** Приведите пример, когда внешняя мера неаддитивна (то есть не удовлетворяет $\mu^*(A \coprod B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$).

**Задача 2.19 (!).** Пусть $A$ множество меры нуль. Докажите, что $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B \backslash A) = \mu^*(B)$.

**Задача 2.20 (!).** Докажите, что счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль

**Задача 2.21.** Докажите, что множества меры нуль образуют булев идеал в булевой алгебре $2^S$.

**Задача 2.22 (*).** Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ алгебра, порожденная интервалами на отрезке или на прямой, со стандартной мерой. Приведите пример континуального подмножества меры нуль.

**Задача 2.23.** Задан диффеоморфизм из отрезка в отрезок, гладкий, в том числе, и на концах отрезка. Докажите, что он переводит множества меры нуль в множества меры нуль.

**Задача 2.24.** Задан диффеоморфизм из интервала в прямую. Докажите, что он переводит множества меры нуль в множества меры нуль.

## 2.3. Измеримые множества

**Определение 2.9.** Рассмотрим множества меры нуль как булев идеал в булевой алгебре $2^S$. Если для $A, B \subset S$ имеет место $\mu^*(A \triangle B) = 0$, мы говорим $A$ **и** $B$ **совпадают почти всюду**.

Факторалгебра по идеалу множеств меры ноль называется **алгебра подмножеств** $S$ **с точностью до подмножеств меры нуль**. На протяжении этого листка мы будем обозначать эту алгебру как $2^S/\sim$.

**Задача 2.25.** Зафиксируем $x \in S$. Предположим, что $\{x\} \in \mathfrak{U}$. Пусть мера подмножества $X \subset S$ задается $\mu(X) = 1$ если $x \in X$ и $\mu(X) = 0$ в противном случае. Найдите $\mathfrak{U}/\sim$.

**Задача 2.26 (!).** Определим функцию $d:\ 2^S \times 2^S \longrightarrow \mathbb{R}$ как $d(A, B) := \mu^*(A \triangle B)$. Докажите, что эта функция удовлетворяет неравенству треугольника: $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$.

**Задача 2.27 (!).** Пусть $\mu^*(A_1 \triangle A_2) = 0$. Докажите, что $\mu^*(A_1 \triangle B) = \mu^*(A_2 \triangle B)$, для любого $B \in 2^S$.

**Замечание.** Из этой задачи следует, что функция $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$ корректно определена на множестве $2^S/\sim$.

**Задача 2.28.** Докажите, что функция $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$ задает метрику на $2^S/\sim$.

**Задача 2.29 (!).** Рассмотрим пополнение $2^S/\sim$ относительно этой метрики. Докажите, что это тоже булева алгебра.

**Определение 2.10.** Пусть $\{X_i\}$ последовательность подмножеств в $S$. **Обратный предел** $\{X_i\}$ это множество

$$\lim_{\leftarrow}\{X_i\} := \bigcup_i \left(\cap_{j>i} X_j\right)$$

**Задача 2.30.** Докажите, что обратный предел не зависит от порядка в последовательности $\{X_i\}$ (т.е., если мы переставим $X_i$, обратный предел не изменится).

**Задача 2.31.** Пусть $A \in 2^S$ и $\{X_i\} \subset 2^S$, а $d(A, X_i) = \lambda_i$. Докажите, что

$$d(A, \lim_{\leftarrow}\{X_i\}) \leq \sum \lambda_i.$$

**Задача 2.32 (!).** Пусть задана последовательность Коши $\{X_i\}$ в $2^S/\sim$. Докажите, что она сходится к $\lim\limits_{\leftarrow}\{X_i\}$.

**Указание.** Заменив $\{X_i\}$ на подпоследовательность, добейтесь того, чтобы

$$d(X_i, X_j) < 2^{-\min(i,j)}.$$

Воспользовавшись предыдущей задачей, убедитесь, что

$$d(X_i, \lim_{\leftarrow}\{X_i\}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

**Определение 2.11.** Множество $X \subset S$ называется **измеримым**, если оно лежит в пополнении $\mathfrak{U}/\sim$ относительно метрики, определенной выше

**Задача 2.33 (!).** Докажите, что измеримые множества образуют подалгебру в $2^S$.

**Задача 2.34 (**).** Воспользовавшись аксиомой выбора, приведите пример неизмеримого подмножества в $[0,1]$ (со стандартной мерой)

**Задача 2.35 (!).** (теорема Лебега) Докажите, что на измеримых множествах функция $\mu^*$ конечно аддитивна (удовлетворяет $\mu^*(A \coprod B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$).

**Указание.** Воспользуйтесь тем, что алгебра измеримых множеств является пополнением $\mathfrak{U}/(\sim \cap \mathfrak{U})$, а там $\mu$ аддитивна.

**Определение 2.12.** Пусть $\mu$ $\sigma$-аддитивна. В таком случае функция $\mu^*$ на алгебре измеримых множеств называется **продолжением** меры $\mu$. Мы обозначаем ее за $\mu$.

**Задача 2.36 (!).** Пусть $\{A_i\} \subset \mathfrak{U}$ счетная последовательность непересекающихся множеств, такая, что ряд $\sum \mu(A_i)$ сходится. Докажите, что объединение $\bigcup A_i$ измеримо.

**Задача 2.37 (!).** Докажите, что на измеримых множествах функция $\mu^*$ **счетно аддитивна**, то есть удовлетворяет $\mu(\coprod X_i) = \sum \mu(X_i)$

## 2.4. Мера Лебега

**Определение 2.13.** Пусть $\mathfrak{W} \subset S$ - алгебра подмножеств. $\mathfrak{W}$ называется **$\sigma$-алгеброй**, если она замкнута относительно счетных объединений: для любого счетного набора подмножеств $\{X_i\} \subset \mathfrak{W}$, объединение $\bigcup X_i$ принадлежит $\mathfrak{W}$.

**Задача 2.38 (!).** Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - алгебра подмножеств, снабженная счетно-аддитивной и неотрицательной мерой $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Предположим, что $\mu(S) < \infty$. Докажите, что алгебра измеримых подмножеств является $\sigma$-алгеброй.

**Определение 2.14. Мерой** на $\sigma$-алгебре $\mathfrak{W} \subset S$ называется счетно-аддитивная, неотрицательная функция $\mathfrak{W} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

**Задача 2.39 (*).** Приведите пример конечно-аддитивной, но не счетно-аддитивной меры. Докажите, что мера счетно-аддитивна тогда и только тогда, когда $\mu^*(A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathfrak{W}$.[1]

**Задача 2.40 (!).** Пусть $S_1$, $S_2$ множества, снабженные алгебрами

$$\mathfrak{U}_i \subset 2^{S_i}, \quad i = 1, 2$$

и конечно-аддитивной неотрицательной мерой

$$\mu_i : \mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$ в $2^{S_1 \times S_2}$, порожденную подмножествами вида $A_1 \times A_2$, где $A_i \in \mathfrak{U}_i$. На каждом таком подмножестве определим

$$\mu(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

а. Докажите, что $\mu$ можно продолжить до конечно-аддитивной неотрицательной меры на кольце $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$.

б. [**] Докажите, что это продолжение $\sigma$-аддитивно, если $\mu_i$ $\sigma$-аддитивны.

[1] Иначе говоря, счетная аддитивность это то же самое, что $\sigma$-аддитивность

**Определение 2.15.** Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, порожденную открытыми множествами вида $I_1 \times I_2 \times ... I_n$, где $I_k$ - отрезки, интервалы или полуинтервалы. Мы будем называть эту алгебру множеств **алгеброй, порожденной параллелепипедами**. Продолжим функцию

$$\mu(I_1 \times I_2 \times ... I_n) \longrightarrow \prod |I_k|$$

до конечно-аддитивной неотрицательной меры $\mu$ на $\mathfrak{U}$. Пусть $\mathfrak{M}$ обозначает пополнение $\mathfrak{U}$ относительно $d(A, B) := \mu^*(A \triangle B)$, т.е. множество измеримых множеств, соответствующих $\mathfrak{U}$ и $\mu$. Элементы $\mathfrak{M}$ называются **измеримыми по Лебегу**, а продолжение $\mu^*$ на $\mathfrak{M}$ - **мерой Лебега**.

**Задача 2.41 (!).** а. Докажите, что мера Лебега $\sigma$-аддитивна на алгебре, порожденной параллелепипедами.

б. Докажите, что каждое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо.

**Определение 2.16.** Пусть $M$ топологическое пространство. Рассмотрим $\sigma$-алгебру, порожденную открытыми множествами. Ее элементы называются **борелевскими подмножествами** $M$.

**Задача 2.42 (!).** Докажите, что борелевские подмножества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу.

**Задача 2.43 (!).** Докажите, что для каждого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ найдется борелевское множество $B \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $\mu(B \triangle A) = 0$.

**Задача 2.44 (*).** Пусть $V \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ограниченное подмножество открытого шара. Докажите, что $V$ измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(V) + \mu^*(B \backslash V) = \mu(B)$