Листок 1. Топология $\mathbb{R}^n$. Планарные графы (7 февраля)

1. Докажете, что определение непрерывности через открытые множества (прообраз открытого множества открыт) эквивалентно обычному ε–δ определению.

2. Докажите, что линейно связное множество связно.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество. Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ величину $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$ называют *расстоянием* от точки x до множества A.

3. а) Докажите, что функция $f(x) = d(x, A)$ непрерывна для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$.
б) Докажите, что если множество A замкнуто, то функция $f(x) = d(x, A)$ для всех $x \notin A$ принимает положительные значения.

Пусть A, $B \subset \mathbb{R}^n$ — произвольные подмножества. Величину $d(A, B) = \inf\limits_{a \in A,\, b \in B} \|a - b\|$ называют *расстоянием* между множествами A и B.

4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмножество, $C \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество. Докажите, что существует такая точка $c_0 \in C$, что $d(A, C) = d(A, c_0)$, а если множество A тоже компактно, то существует ещё и такая точка $a_0 \in A$, что $d(A, C) = d(a_0, c_0)$.

Пусть $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Точку $a \in A$ называют *внутренней*, если существует множество U, открытое в X, для которого $a \in U \subset A$. Точку $a \in A$ называют *изолированной*, если существует множество U, открытое в X, для которого $U \cap A = a$. Точку $x \in X$ называют *граничной* точкой A, если для любого множества U, открытого в X, $U \cap A \neq \varnothing$ и $U \cap (X - A) \neq \varnothing$. *Внутренность* множества A — это множество всех внутренних точек. *Замыкание* множества A — это объединение множества A и всех граничных точек.

5. Докажите, что: а) множество $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда оно содержит все граничные точки; б) внутренность множества A — это наибольшее открытое множество, содержащееся в A; в) замыкание A — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A; г) множество всех граничных точек A — это разность замыкания и внутренности.

6. (Кусочно–линейная теорема Жордана) Пусть C — замкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus C$ состоит ровно из двух связных областей, причём границей каждой из них служит C.

7. Пусть a, b, c, d — точки замкнутой несамопересекающейся ломаной C, расположенные в указанном порядке. Предположим, что точки a и c соединены ломаной L_1, а точки b и d соединены ломаной L_2, причём обе эти ломаные лежат в одной и той же из двух областей, образованных ломаной C. Докажите, что ломаные L_1 и L_2 пересекаются в некоторой точке.

Пусть граф K_n состоит из n вершин, попарно соединённых рёбрами, а граф $K_{n,m}$ состоит из $n + m$ вершин, разбитых на два подмножества из n вершин и из m вершин, причём рёбрами соединены все пары вершин из разных множеств.

8. Докажите, что графы $K_{3,3}$ и K_5 непланарные.

9. Пусть G — *дерево*, т.е. связный граф без циклов. Докажите, что $v(G) = e(G) + 1$, где $v(G)$ — число вершин, $e(G)$ — число рёбер графа G.

10. (Формула Эйлера) Пусть G — планарный граф, состоящий из s компонент связности, среди которых нет изолированных вершин. Пусть, далее, v — число вершин графа G, а e — число его рёбер. Тогда для любого вложения графа G в плоскость число граней f одно и то же, а именно, $f = 1 + s - v + e$.

11. Докажите, что связный планарный граф (без петель и двойных рёбер) содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

12. Докажите, что вершины любого планарного графа (без петель и двойных рёбер) можно раскрасить в пять цветов так, что любые две вершины, соединённые ребром, будут разного цвета.