Листок 2. Топологические пространства (14 февраля)

1. Докажите, что любое замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

2. Связно ли пространство GL(n), состоящее из невырожденных матриц?

3. а) Докажите, что пространство SO(3), состоящее из ортогональных матриц порядка 3 с определителем 1, связно.

б) Докажите, что пространство SO(n) связно.

4. Докажите, что пространство, состоящее из невырожденных матриц с положительным определителем, связно.

5. а) Докажите, что пространство U(n) унитарных матриц связно.

б) Докажите, что пространство SU(n) унитарных матриц с определителем 1 связно.

Топологическое пространство X называют *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдутся непересекающиеся открытые множества, содержащие эти точки.

6. Приведите пример нехаусдорфова топологического пространства.

В метрическом пространстве X можно определить топологию следующим образом: множество $A \subset X$ открыто, если любая точка $a \in A$ содержится в A вместе с некоторым открытым шаром с центром a.

7. Докажите, что топология, индуцированная метрикой, является хаусдорфовой.

8. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве X для любых двух различных точек x и y найдётся окрестность $U \ni x$, замыкание которой не содержит y.

9. Пусть C — компактное подмножество хаусдорфова пространства X и $x \in X \setminus C$. Докажите, что у точки x и у множества C есть непересекающиеся окрестности.

10. Докажите, что у любых двух непересекающихся компактных подмножеств A и B хаусдорфова пространства X есть непересекающиеся окрестности.

11. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y. Докажите, что f — гомеоморфизм.

12. Докажите, что $D^n/\partial D^n \approx S^n$.

13. Докажите, что пространство $S^1 \times S^1$ гомеоморфно пространству, которое получается при следующем отождествлении точек сторон квадрата $0 \leqslant x, y \leqslant 1$: $(x, 0) \sim (x, 1)$ и $(0, y) \sim (1, y)$. (Это пространство называют *тором*.)

14. б) Докажите, что $\{*\} * X \approx CX$ (здесь $\{*\}$ — одноточечное пространство.)

а) Докажите, что $S^0 * X \approx \Sigma X$.

15. Докажите, что $S^p * S^q \approx S^{p+q+1}$.

16. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.