Листок 4. Двумерные поверхности (28 февраля)

1. Докажите, что если из проективной плоскости вырезать диск D^2, то в результате получится лист Мёбиуса.

Пусть $M_1\#M_2$ — двумерная поверхность, которая получается из двумерных поверхностей M_1 и M_2 следующей операцией: из M_1 и из M_2 вырезается по диску D^2 и соответствующие точки их краёв склеиваются. Эту операцию называют *связной суммой*. Связную сумму n торов T^2 будем для краткости обозначать nT^2, а связную сумму m проективных плоскостей P^2 будем обозначать mP^2 (обозначения nT^2 и mP^2 не стандартные).

2. Докажите, что если поверхность M_1 неориентируема, то поверхность $M_1\#M_2$ тоже неориентируема.

3. Докажите, что $S^2\#2P^2 \approx K^2$, т.е. сфера S^2, из которой вырезаны два диска и вместо них вклеены два листа Мёбиуса, гомеоморфна бутылке Клейна.

4. Докажите, что $T^2\#P^2 \approx P^2\#P^2\#P^2$.

Пусть M^2 — триангулированная замкнутая двумерная поверхность; v — число вершин триангуляции, e — число рёбер, f — число граней. *Эйлеровой характеристикой* поверхности M^2 называют число $\chi(M^2) = v - e + f$.

5. Докажите, что $\chi(M_1\#M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

6. Докажите, что $\chi(mT^2) = 2 - 2m$ и $\chi(nP^2) = 2 - n$.

7. Докажите, что замкнутая ориентируемая двумерная поверхность не может быть гомеоморфна замкнутой неориентируемой двумерной поверхности.

8. Докажите, что эйлеровы характеристики двух гомеоморфных замкнутых двумерных поверхностей одинаковы. (Указание: рассмотрите две триангуляции одной и той же поверхности и пошевелите одну из них так, чтобы рёбра этих двух триангуляций пересекались трансверсально.)

9. Какой двумерной поверхности гомеоморфно факторпространство $S^1 \times S^1$ по следующему отношению эквивалентности: $(x, y) \sim (y, x)$?

10. Можно ли граф $K_{3,3}$ вложить в лист Мёбиуса?

11. Можно ли граф K_5 вложить в тор?

12. Докажите, что поверхности nT^2 и mP^2 можно получить из $4n$-угольника и $2m$-угольника, отождествляя их стороны соответствующим образом.

13. а) Докажите, что на поверхности nP^2 существует замкнутая кривая γ, после разрезания вдоль которой поверхность становится ориентируемой.

б) Докажите, что если n чётно, то окрестность кривой γ гомеоморфна цилиндру, а если n нечётно — то листу Мёбиуса.

14. Предположим, что на сфере с g ручками M^2 можно расположить p несамопересекающихся замкнутых кривых $C_1, \dots, C_p$ так, чтобы они попарно не пересекались и не разбивали M^2 (т.е. чтобы множество $M^2 \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_p)$ было связно), но любые $p+1$ такие кривые разбивают M^2 на части. Докажите, что $p = g$.

15. Докажите, что на замкнутой неориентируемой поверхности nP^2 можно расположить n попарно не пересекающихся листов Мёбиуса, но нельзя расположить $n+1$ попарно непересекающихся листов Мёбиуса.