Листок 5. Гомотопии (7 марта)

1. а) Пусть $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$, причём множества $X_1, \dots, X_n$ замкнуты. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$ и его ограничения $f_i = f|_{X_i}$. Докажите, что отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все отображения f_i.

б) Докажите аналогичное утверждение для открытых множеств.

Замечание. Задача 1 а) нужна для проверки того, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

Пусть X и Y — топологические пространства с отмеченными точками x_0 и y_0. Их *букетом* называют пространство $X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$ (пространства X и Y склеиваются по отмеченным точкам). Букет двух пространств обозначают $X \vee Y$.

2. Докажите, что пространства $S^1 \vee I^1$ и S^1 гомотопически эквивалентны.

3. Докажите, что пространства $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ и $S^2 \vee S^1$ гомотопически эквивалентны.

4. Из сферы с g ручками выколота точка. Докажите, что полученное пространство гомотопически эквивалентно букету n окружностей и вычислите n.

5. Докажите, что если из пространства $\mathbb{R}^3$ выбросить n экземпляров S^1 (все окружности незаузленные и попарно не зацепленные), то полученное пространство будет гомотопически эквивалентно букету n экземпляров пространства $S^2 \vee S^1$.

6. Пусть L — две окружности в $\mathbb{R}^3$, зацепленные наиболее простым способом. Докажите, что пространства $\mathbb{R}^3 \setminus L$ и $S^2 \vee T^2$ гомотопически эквивалентны.

Подпространство $A \subset X$ называют *ретрактом* X, если существует непрерывное отображение $r : X \to A$, ограничение которого на A тождественно. Отображение r при этом называют *ретракцией*.

7. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны (т.е. покажите, как они выводятся друг из друга):

а) Любое непрерывное отображение $f : D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.

б) Не существует ретракции $r : D^n \to S^{n-1}$.

в) Пусть $v(x)$ — такое непрерывное векторное поле на D^n, что $v(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$. Тогда $v(x) = 0$ для некоторой точки $x \in D^n$.

8. Докажите, что A — ретракт X тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $f : A \to Y$ можно продолжить на всё X.

9. Докажите, что если любое непрерывное отображение пространства X в себя имеет неподвижную точку, то любое непрерывное отображение его ретракта A в себя тоже имеет неподвижную точку.

10. Пусть S^∞ —множество точек $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля и $\sum x_i^2 = 1$. Это множество является метрическим пространством, и на нём есть естественная топология. Докажите, что пространство S^∞ стягиваемо.

Указание: докажите, что тождественное отображение гомотопно отображению $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$.

11. Докажите, что отображения $f, g : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, заданные формулами $f(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ и $g(A, B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$, гомотопны.

12. Докажите, что пространства $\Sigma(S^1 \times S^1)$ и $S^2 \vee S^2 \vee S^3$ гомотопически эквивалентны.