Листок 6. Векторные поля на плоскости (14 марта)

1. Рассмотрим на комплексной плоскости векторное поле $v(z) = \dfrac{z^n}{|z|^{n-1}}$ при $z \neq 0$, $v(0) = 0$. Найдите индексы особых точек таких векторных полей для всех целых n и нарисуйте их траектории для $n = -1$, $n = \pm 2$ и $n = 3$.

Пусть v — векторное поле на плоскости, γ — замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости, не проходящая через особые точки этого векторного поля. *Индексом* кривой γ относительно векторного поля v называют число оборотов вектора $v(x)$ при обходе кривой γ. Обороты вектора считаются положительными, если их направление совпадает с направлением обхода кривой.

2. Докажите, что индекс кривой γ равен сумме индексов особых точек, заключенных внутри ее.

3. Пусть на замкнутой несамопересекающейся кривой заданы векторные поля v и w, причем в любой точке X векторы $v(X)$ и $w(X)$ не противоположны по направлению. Докажите, что тогда индексы кривой γ относительно этих векторных полей равны.

4. С помощью задачи 3 докажите, что любой многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.

5. Назовем векторное поле v четным, если $v(x) = v(-x)$, и нечетным, если $v(x) = -v(-x)$. Докажите, что индекс точки O для четного поля четен, а для нечетного поля нечетен.

6. Пусть на граничных окружностях кольца задано векторное поле так, что векторы касаются граничных окружностей и на одной окружности направлены в одну сторону, а на другой в другую (противоположную). Продолжите это векторное поле на всё кольцо так, чтобы оно не имело особых точек.

7. Докажите, что векторное поле без особых точек, заданное на граничных окружностях кольца, можно продолжить на все кольцо тогда и только тогда, когда индексы граничных окружностей равны.

8. Пусть замкнутая самопересекающаяся кривая разбивает плоскость на несколько областей. В каждой области можно выбрать некоторую точку O и сопоставить области число оборотов вектора $\overrightarrow{OX}$ при обходе кривой. Докажите, что если две области имеют общую границу, то соответствующие им числа отличаются на 1.

9. Предположим, что интегральные траектории векторного поля v на плоскости касаются некоторой окружности C в i точках внутренним образом и в e точках внешним образом, причём внутри C расположена единственная особая точка. Докажите, что индекс этой особой точки равен $1 + (i - e)/2$.

10. Пусть f — гладкая функция на плоскости. Докажите, что индекс изолированной особой точки векторного поля $v = \operatorname{grad} f$ (а) может принимать значения $1, 0, -1, -2, \ldots$ и (б)* не может принимать других значений.