Листок 7. Векторные поля на двумерных поверхностях. Теорема Уитни–Грауштейна (21 марта)

1. Постройте на торе векторное поле без особых точек.

2. Постройте на бутылке Клейна векторное поле без особых точек.

3. Постройте на сфере векторное поле с одной особой точкой.

4. Постройте на проективной плоскости векторное поле с одной особой точкой.

5. Постройте на сфере с двумя ручками векторное поле с одной особой точкой.

6. Рассмотрим $4g$-угольник и на нём — векторное поле, траектории которого — параллельные прямые. Из $4g$-угольника можно склеить сферу с g ручками и получить на ней векторное поле. Опишите, как выглядят особые точки этого векторного поля.

* * *

7. На сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывное поле векторов единичной длины, не обязательно касающихся этой сферы. Докажите, что хотя бы один из этих векторов ортогонален сфере.

8. Пусть $f : S^2 \to S^2$ — непрерывное отображение. Докажите, что существует точка $x \in S^2$, для которой $f(x) = \pm x$.

9. Докажите, что любое непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ имеет неподвижную точку.

* * *

Назовём *степенью* гладкой кривой $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ степень отображения $S^1 \to S^1$, заданного формулой $\varphi \mapsto \frac{v}{|v|}$, где $v = \frac{d\gamma}{d\varphi}$ — вектор скорости кривой (гладкость кривой означает, что отображение γ дифференцируемо и вектор скорости нигде не обращается в нуль). Говоря неформально, степень — это число оборотов вектора скорости при обходе вдоль кривой.

10. Для каждого целого числа n нарисуйте кривую, имеющую степень n.

Будем говорить, что гладкие замкнутые кривые γ_0 и γ_1 *регулярно гомотопны*, если существует семейство гладких замкнутых кривых γ_t, непрерывно зависящее от $t \in [0, 1]$.

Назовём *простой петлёй* часть ω кривой γ, обладающую следующими свойствами: 1) ω начинается и кончается в точке самопересечения кривой γ; 2) ω не имеет самопересечений (но она может пересекать другие части кривой γ).

11. а) Докажите, что любая гладкая кривая регулярно гомотопна гладкой кривой с конечным числом точек самопересечения.

б) Докажите, что любая гладкая кривая с конечным (ненулевым) числом точек самопересечения имеет простую петлю.

12. Докажите, что для простой петли ω кривой γ существует регулярная гомотопия, при которой изменяется только ω, причём после гомотопии мы получаем новую простую петлю ω', которая не пересекает γ.

13. Покажите, что применяя конструкцию из задачи 12, в конце концов мы можем получить окружность с маленькими петельками — внешними и внутренними. Покажите, что эти петельки можно менять местами, протаскивая одну петельку через другую.

14. Постройте регулярную гомотопию, которая уничтожает пару петелек, одна из которых внутренняя, а другая внешняя.

15. Докажите, что кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их степени равны (Уитни — Грауштейн).

16. Докажите, что на сфере есть только два класса регулярно гомотопных кривых. (На сфере можно уничтожить пару внутренних петелек.)