Листок 8. Фундаментальная группа (28 марта)

1. Докажите, что фундаментальная группа букета n окружностей изоморфна свободной группе с n образующими.

2. Докажите, что группа $\pi_1(nT^2)$ порождена образующими $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, связанными единственным соотношением $\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 1$.

3. Докажите, что группа $\pi_1(nP^2)$ порождена образующими $a_1, \ldots, a_n$, связанными единственным соотношением $a_1^2 \cdots a_n^2 = 1$.

4. а) Докажите, что если $G = \pi_1(nT^2)$, то $G/G' \cong \mathbb{Z}^{2n}$.
б) Докажите, что если $G = \pi_1(nP^2)$, то $G/G' \cong \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

5. Докажите, что $\pi_1(S^n) = 0$ при $n \geqslant 2$.

6. Докажите, что $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$.

7. Докажите, что фундаментальная группа поверхности nT^2, из которой вырезано $k \geqslant 1$ дисков, является свободной группой ранга $2n + k - 1$.

8. Докажите, что фундаментальная группа поверхности nP^2, из которой вырезано $k \geqslant 1$ дисков, является свободной группой ранга $n + k - 1$.

9. Вычислите фундаментальную группу $\mathbb{R}P^n$ для всех $n \geqslant 1$.

10. Пусть X — лист Мёбиуса, A — его край. Докажите с помощью фундаментальной группы, что A не является ретрактом X.

11. Докажите с помощью фундаментальной группы, что край ручки (тора с вырезанным диском) не является ретрактом ручки.

12. Пусть M_g^3 — многообразие единичных касательных векторов к сфере с g ручками. Докажите, что группа $\pi_1(M_g^3)$ порождена образующими $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, c$, которые связаны следующими соотношениями: $a_i c = c a_i$, $b_i c = c b_i$ и $\prod_{i=1}^{g}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = c^{2-2g}$.