1 Лекция 10.

Мы закончили прошлую лекцию тем, что сформулировали теорему о "существовании и единственности решений дифференциальных уравнений". Почему она так называется? Дифференциальным уравнением (точнее, обыкновенным дифференциальным уравением) называется уравение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} y = f(y, t). \tag{1.1}$$

В самом простом случае здесь t – координата на прямой $\mathbb{R}$, f – гладкая функция на произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а $y = y(t)$ – некоторая гладкая $\mathbb{R}$-значная функция от t, иными словами, отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Предполагается, что f задано, а y надо найти. В большей общности, берем векторное пространство V, и рассматриваем функции $y : \mathbb{R} \to V$. Что тогда надо взять в качестве f? очевидно, что для того, чтобы (1.1) имело смысл, f должно быть функцией на $V \times \mathbb{R}$ со значениями в V. Как обычно, можно еще заменить все V на какую-то окрестность $U \subset V$, а прямую $\mathbb{R}$ – на интервал $I \subset \mathbb{R}$; тогда f будет отображением из произведения $U \times I$ в V, а решением уравнения (1.1) должна быть функция $y : \mathbb{R} \to U$.

Пусть теперь U – просто абстрактная область, или даже гладкое многообразие, без фиксированного вложения $U \subset V$ в векторное пространство. Как тогда придать смысл (1.1)?

Как придать смысл правой части, понятно – $f = f(y, t)$ должно быть векторным полем на $U \times I$. Чуть точнее, заметим, что в каждой точке $\langle u, t\rangle \in U \times I$ касательное пространство канонически разложено в прямую сумму: $T_{\langle u,t\rangle}(U \times I) = T_u U \oplus T_t I$. Вектора из первого слагаемого будем называть *вертикальными*, а из второго – *горизонтальными* (по отношению к естественной проекции $U \times I \to I$). Тогда $f = f(y, x)$ – вертикальное векторное поле на $U \times I$ (т.е. в любой точке $\langle u, t\rangle$ вектор $f_{\langle u,t\rangle}$ вертикальный). Теперь (1.1) можно переписать так:

$$Dy_t(e_t) = f_{\langle y(t),t\rangle}.$$

Здесь e_t – единичный касательный вектор к I, а Dy_t – дифференциал отображения $y : I \to U \times I$ (вычисленный в точке t).

Однако удобнее поступить так. Вместо отображения $y : I \to U$ рассмотрим его график $Y : I \to U \times I$, $Y(t) = \langle y(t), t\rangle$. А вместо вертикального векторного поля f рассмотрим сумму $\widetilde{f} = f + e_t$ – добавим к вертикальному вектору $f = f_{\langle u,t\rangle}$ единичный горизонтальный вектор e_t. Тогда (1.1) перепишется так:

$$DY_t(e_t) = \widetilde{f}_{Y(t)}.$$

Иными словами, у нас есть область (или любое многообразие) $\widetilde{U} = U \times \mathbb{R}$ и векторное поле $\widetilde{f}$ на ней, причем горизонтальная компонента этого векторного поля в любой точке есть единичный вектор e_t.

Определение 1.1. Пусть дано векторное поле ξ на многообразии M. Отображение $Y : I \to M$ из интервала I в M называется *интегральной кривой* векторного поля ξ, если в клаждой точке $t \in I$ имеем $DY_t(e_t) = \xi_{Y(t)}$.

Итак, (1.1), надлежащим образом переписанное, значит, что $Y = \langle y(t), t\rangle$ есть интегральная кривая векторного поля $\widetilde{f} = f + e_t$ на $\widetilde{U} = U \times I$. Заметим, что из этого автоматически следует, что Y есть сечение проекции $\pi : \widetilde{U} \to I$ (потому что дифференциал композиции $\pi \circ Y : I \to I$ в каждой точке переводит единичный вектор e_t в тот же единичный вектор e_t, а потому $\pi \circ Y = \mathsf{id}$ – тождественное отображение).

В этой интерепретации, *существование* решения (1.1) – это утверждение о том, что через каждую точку $u \times \{0\} \in \widetilde{U}$ (которая называется *начальным условием*) проходит интгеральная прямая векторного поля $\widetilde{f}$ (мы предположили, что $0 \in I$). Единственность – это что такая кривая только одна. На самом деле верно и третье свойство, известное как *гладкая зависимость решения от начальных условий.* неформально, утверждается, что эта самая единственная интегральная кривая гладко зависит от начального условия $u \in U$. Формально же, обозначим интегральную кривую $Y : I \to U \times I$, проходящую через $u \times \{0\} \in U \times I$, через Y_u, и рассмотрим общее отображение

$$\Phi : \widetilde{U} \to \widetilde{U}, \qquad \Phi(\langle u, t\rangle) = Y_u(t).$$

Тогда утверждается, что это гладкое отображение. Все вместе можно сформулировать так: существует гладкое отображение $\Phi : \widetilde{U} \to \widetilde{U}$, которое коммутирует с проекцией $\widetilde{U} \to I$ и удовлетворяет условию

$$D\Phi(e_t) = \widetilde{f}.$$

Это как раз то, что и утверждалось в конце прошлой лекции – только для того, чтобы Φ действительно существовало, иногда нужно заменить U на открытое подмножество $U' \subset U$, а I – на меньший интервал $I' \subset I$.

Докажем теперь это утверждение.

Доказательство теоремы о решениях дифф. уравнений. Как и теорема об обратной функции, теорема о решениях дифференциальных уравнений доказывается методом последовательных приближений – только приближать приходится не точку области, а целую функцию. Придумал это доказательство, кстати, Пикар.

Итак, пусть дано векторное поле $\widetilde{f} = f + e_t$ на области $\widetilde{U} = U \times I$. Выберем вложение $U \subset V$ в векторное пространство. Надо найти отображение $\Phi : \widetilde{U} \to \widetilde{U}$, совместимые с проекцией на I (т.е. $\Phi(\langle u, t\rangle) = \langle y(u,t), t\rangle$). Будем искать его в виде

$$\Phi(\langle u, t\rangle) = \langle u + h(u,t), t\rangle,$$

где $h : U \times I \to V$ – некоторая гладкая функция. На множестве всех непрерывных функций $h : U \times I \to V$ определим операцию G следующим образом:

$$G(h)(u,t) = \int_0^t f(u + h(u,\tau), \tau) d\tau.$$

Лемма 1.2. *Функция Φ дает решение (1.1) тогда и только тогда, когда соответствующая функция h есть неподвижная точка отображения G: $G(h)(u,t) = h(u,t)$ для любых $u \in U$, $t \in I$.*

Доказательство. Функция y из уравнения (1.1), отвечающая нашему Φ и начальному условию $u \in U$ – это просто $y_u(t) = u + h(u,t)$. Поскольку $G(h) = h$, имеем $y_u(t) = u + G(h)(u,t)$, и

$$\frac{\partial}{\partial t} y_u(t) = \frac{\partial}{\partial t} G(h)(u,t) = f(u + h(u,t), t) = f(y_u(t), t). \qquad \square.$$

Заметим теперь, что, поскольку f предполагалось гладким, то можно считать, уменьшая при необходимости U и I, что

$$\begin{gathered} \|f(t,u) - f(t,u')\| < L\|u - u'\|, \\ f(t,u) < C \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $C, L > 0$ – некоторые фиксированные константы (а $t \in I$, $u, u' \in U$ произвольные). Кроме того, еще уменьшая U и I, можно считать, что $L|t| < C_1 < 1$ для фиксированной константы C_1, меньшей 1.

Лемма 1.3. *Пусть h_1, h_2 удовлетворяют условию $\|h_i(u,t)\| < C|t|$, и $\|h_1 - h_2\| < A$ для какого-то $A > 0$. Тогда $\|G(h_i)(u,t)\| < C|t|$, а $G(h_1) - G(h_2) < C_1 A$.*

Доказательство. По определению, имеем

$$\|G(h_i)(u,t)\| = \left\| \int_0^t f(u + h_i(u,\tau), \tau) d\tau \right\| < \left\| \int_0^t C d\tau \right\| = C|t|.$$

Кроме того, фиксируем $u \in U$ и положим $f_i(\tau) = f(u + h_i(u,\tau), \tau)$.

$$\|G(h_1)(u,t) - G(h_2)(u,t)\| = \left\| \int_0^t (f_2(\tau) - f_1(\tau)) d\tau \right\| \le \int_0^t \|(f_2(\tau) - f_1(\tau))\| d\tau < L \int_0^t A d\tau = C_1 A,$$

где мы применили к $f_i(\tau)$ оценку (1.2). □

На этом доказательство практически закончено. А именно, выбираем такие $U' \subset U$, $I' \subset I$, что для любых $u \in U'$, $t \in I'$ и любого $v \in V$ с $\|v\| < C|t|$ имеем $u + v \in U$, и рассматриваем пространство A всех непрерывных функций $h : U' \times I' \to U$, для которых $\|h(t_1) - h(t_2)\| < C|t_1 - t_2|$. Тогда в силу Леммы, операция G хорошо определена на множестве A (условия на U' и I' нужны, чтобы $u + h(u,t)$ попадало в область определения f). Более того, определим на A метрику, положив

$$d(h_1, h_2) = \sup_{U' \times I'} |h_1(u,t) - h_2(u,t)|.$$

Тогда, как мы знаем, A с этой метрикой есть полное топологическое пространство. А с другой стороны, $G : A \to A$, в силу Леммы – сжимамющее отображение. Следовательно, у него есть единственная неподвижная точка.

Есть однако же одна тонкость: чтобы простанство A было полным, необходимо рассматривать *непрерывные* функции h. А нам нужно *гладкое* отображение $\Phi : U' \times I' \to U \times I$. Это проще всего доказать методом bootstraping: если мы знаем, что Φ решает уравнение, и что решения любых уравнений имеют класс гладкости C^k, то производная $D\Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} D_v \Phi(u,t) = Df_{\langle \Phi(u,t), t\rangle}(f(\Phi(\langle u,t \rangle))),$$

а потому тоже имеет класс гладкости C^k, а потому Φ имеет класс гладкости C^{k+1}. Подробное проведение этого аргумента мы оставляем в качестве упражнения. □

Следствие 1.4. *Пусть ξ – векторное поле на многообразии M. Тогда у любой точки есть окрестность $U \subset M$ и такой поток $\Phi = \Psi_t : U \times I \to M$, определенный на некотором интервале I, что ξ касательно к Ψ_t.*

Доказательство. Это фактически эквивалентно теореме о решениях (1.1) при дополнительном предположении: f не зависит от t. Действительно, положим $f(u,t) = \xi_u$, и пусть $\Phi : U \times I \to M \times I$ – решение соответствующего уравнения. Тогда имеем

$$\Phi(u,t) = \langle \Psi(u,t), t \rangle$$

для какого-то отображения $\Psi : U \times I \to M$, и просто по определению ξ касательно к Ψ. Кроме того, т.к. f не зависит от t, то для любого $t' \in I$ отображения $\Psi^{t'}(u,t) = \Psi(u, t + t')$ тоже дают решение (1.1); в силу единственности имеем $\Psi_t \circ \Psi_{t'} = \Psi_{t+t'}$. □

Следствие 1.5 (Теорема о выпрямлении.). *Пусть ξ – векторное поле на многообразии M, и пусть ξ не равно 0 в какой-то точке $m \in M$. Тогда в окрестности этой точки существует такая система координат $x_1, \dots, x_n$, что $\xi = \partial/\partial x_1$.*

Доказательство. Упражнение. Указание: выберите такое подмногообразие $m' \subset M$ коразмерности 1, что $m \in M'$, а вектор ξ_m не лежит в касательном пространстве $T_m M' \subset T_m M$; затем, применив теорему об обратной функции, докажите, что если $\Phi : U \times I \to M$ – поток, отвечающий ξ, то при достаточно маленьких U, I отображение $\Phi : (U \cap M') \times I \to M$ – диффеоморфизм. $\square$

Замечание 1.6. Теорема о решениях уравнений это частный случай этого утверждения, примененного к полю специального вида $\xi = \widetilde{f} = f + e_t$ на $\widetilde{U} = U \times I$. Но на практике, в этом месте проще сначала доказывать частный случай.

Наконец, докажем один чисто топологический факт, для которого, однако, нужна теорема о решениях. Пусть M – компактное многообразия, а $f : M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Говорят, что $c \in \mathbb{R}$ *регулярное значение* функции f, если $df \neq 0$ в каждой точке прообраза $M_c = f^{-1}(c) \subset M$ (иными словами, прообраз c не содержит критических точек функции f). Тогда, как мы знаем, $M_c \subset M$ – гладкое подмногообразие (коразмерности 1).

Предложение 1.7. *Если c – регулярное значение функции f на гладком мнгообразии M, то существует интервал $I \subset \mathbb{R}$, содержащий c, и диффеоморфизм $f^{-1}(I) \cong M_c \times I$, совместимый с проекцией $f : f^{-1}(I) \to I$.*

Доказательство. Заметим, что в окрестности каждой точки $m \in M_c$, требуемый диффеоморфизм можно получить просто из теоремы о неявной функции. Однако же ниоткуда, увы, не следует, что полученные диффеоморфизмы будут согласованы на пересечениях! Поэтому надо действовать аккуратнее. Выберем риманову метрику на M (поскольку M компактно, это всегда можно сделать). Риманова метрика, в частности, задает изоморфизм $g : T^*M \to TM$ между кокасательным и касательным расслоениями. Рассмотрим векторное поле $\mathsf{grad}\, f = g(df)$ на M – оно, кстати, называется *градиентным векторным полем* функции f. Тогда по теореме о решениях, у каждой точки $m \in M_c$ есть окрестность $U_m \subset M$ и диффеоморфизм $\Phi_m : (U_m \cap M_c) \times I \to U_m$, который переводит $\mathsf{grad}\, f$ в единичное векторное поле e_t. Более того, такой диффеоморфизм *единственный.* Теперь можно выбрать конечно покрытие многообразия M_c хорошими окрестностями $U_м \cap M_c$, взять в качестве I пересечение всех интервалов I_m и заметить что, в силу единственности, диффеоморфизмы Φ_m согласованы на пересечениях. $\square$