1 Лекция 3.

В прошлой лекции мы доказали теоремы об обратной и неявной функции. Теперь мы продемонстрируем некоторые применения этих теорем. А именно, мы докажем три утверждения, которые и сами по себе важны, и показывают, как работать с неявными функкиями.

Первое утверждение это на самом деле обобщение теоремы о неявной функции – до той степени, до которой ее вообще можно обобщить, не используя принципиально иные методы.

Напомним, что ранг $\mathsf{rk}\, P$ линейного отображения $P : V \to W$ – это размерность образа $N = \mathsf{Im}\, P \subset W$.

Предложение 1.1 (Теорема о постоянном ранге.). *Пусть дана функция $f \in C^k(U, W)$, и пусть ранг производной $Df_x : V \to W$ – постоянный в окрестности какой-то точки x. Тогда существуют такие локальные системы координат $\Phi : U \to V$, $\Psi : U' \to W$ в окрестностях U', U'' точек x, $f(x)$, что $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ есть линейное отображение $Df_x : V \to W$.*

Замечание 1.2. Локальной системой координат в окрестности $U \subset V$ точки $x \in U$ называют отображение $\Phi : U \to V$, которое переводит x в $0 \in V$, и при этом есть диффеоморфизм U на его образ $\Phi(U) \subset V$. Еще можно, выбрав базис, отождествить $V = \mathbb{R}^n$. В таком случае диффеоморфизм Φ задается n функциями $y_1, \dots, y_n : U \to \mathbb{R}$, $\Phi(v) = \langle y_1(v), \dots, y_n(v)\rangle \in \mathbb{R}^n$, причем $y_1(x) = \dots = y_n(x) = 0$. Говорят, что $y_1, \dots, y_n$ задают систему координат в окрестности x.

Доказательство. Обозначим через N образ отображения $Df_x : V \to W$, и выберем проекцию $P : W \to N$ на $N \subset W$. Тогда производная композиции $P \circ f : V \to N$ сюъективна в точке x. По теореме о неявной функции можно, заменив U на меньшую окрестность U', добиться того, что $V = V' \oplus N$, $x = 0$, и $P \circ f$ в окрестности 0 есть проекция на N. В частности, производная $D(P \circ f)$ сюръективна в каждой точке $x' \in U'$, и ранг ее равен размерности $N = \mathsf{Im}\, f$, т.е. рангу Df_x. С другой стороны, ранг $Df_{x'}$ по условию тоже равен рангу Df_x. Мы имеем $\mathsf{Ker}\, Df_{x'} \subset \mathsf{Ker}\, D(P \circ f)_{x'}$; поскольку это пространства одинаковой размерности, они совпадают. Итак, любой вектор $v \in V'$ лежит в ядре $Df_{x'}$, т.е. $D_v f = 0$. Поэтому $f(x' + v) = f(x')$ для любых $v \in V'$, $x' \in U'$ – иными словами, $f = f_N \circ P_N$, где $f_N : N \cap U' \to W$ – какое-то отображение, а $P_N : V \to N$ – проекция.

Легко видеть, что отображение f_N на самом деле класса C^k – например, потому, что оно совпадает с ограничением f на $N \cap U' \subset U'$.

Осталось выбрать такую систему координат Ψ в окрестности $f(x) \in W$, что $f(U') = f_N(U' \cap N) \subset W$ будет лежать в координатной гиперплоскости $N \subset W$. Разложим $W = N \oplus W'$; тогда, поскольку $P \circ f_N$ есть проекция на N, имеем $f_N = \mathsf{Id} \oplus f'_N$ для какого-то отображения $f'_N : N \to W'$ (геометрически, $f(U') = f_N(U' \cap N) \subset W$ есть график отображения f'_N). Легко видеть, что достаточно положить $\Psi(n \oplus w') = n \oplus (w' - f'_N(n))$ для любого $n \oplus w' \in N \oplus w' = W'$. $\square$

Второе утверждение совсем простое и довольно техническое, но на удивление полезное.

Лемма 1.3. *Пусть $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, $t \in C^l(U, \mathbb{R})$ – две функции, причем $k \leq l + 1$; пусть $Dt_x \neq 0$ в любой точке $x \in U$, а функция f обращается в 0 во всех точках, в которых обращается в 0 функция t. Тогда существует такая функция $g \in C^{k-1}(U, \mathbb{R})$, что $f = tg$.*

Доказательство. Вне подмножества $t^{-1}(0) \subset U$ утверждение очевидно: t там обратимо, и можно взять $g = \frac{1}{t} f$. Надо доказать, что эта функция продолжается до функции класса C^{k-1} на всем U. Это достаточно проверять по отдельности в окрестности каждой точки $x \in U$,

$t(x) = 0$. Возьмем такую окрестность U'. По теореме о неявной функции, примененной к $t : U \to \mathbb{R}$, можно предполагать, что $x = 0 \in V$, дано ортогональное разложение $V = \mathbb{R} \oplus W$, а функция t в окрестности 0 это просто проекция на первое слагаемое.

Разложим f в ряд Тэйлора в окрестности 0. Если f – полиномиальная функция, то утверждение очевидно: можно, например, выбрать координаты $t, x_1, \dots, x_n \in V^*$, тогда любой моном от координат либо содержит t, либо нет, и потому любой полином записывается как $P = P_1 t + P_2$, а поскольку мы знаем, что $P = 0$ при $t = 0$, полином P_2 тождественно равен нулю. Вычитая из f полиномиальный кусок формулы Тэйлора, можем дополнительно предполагать, что $f = D^1 f = \dots = D^k f = 0$ в точке 0. Положим $g(0) = 0$; тогда чтобы g было дифференцируемо $k-1$ раз в точке 0 нужно доказать, что $\|g(v')\| = o(\|v'\|^{k-1})$ при $v' \to 0$. Действительно, по формуле Тэйлора для любых векторов $v, v' \in V$ таких что отрезок $[v, v'] \subset V$ целиком лежит в U' имеем

$$\|f(v')\| \leq \|f(v)\| + \|Df_v\| \cdot \|v' - v\| + \dots + \frac{1}{(k-1)!}\|D^{k-1}f_v\| \cdot \|v' - v\|^{k-1}$$
$$+ \frac{1}{k!} \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|D^k f_{(1-\lambda)v + \lambda v'}\| \cdot \|v - v'\|^k.$$

Мы будем брать $v' = t \oplus w$, $t \in \mathbb{R}$, $w \in W$, и $v = 0 \oplus w$. Поскольку $V = \mathbb{R} \oplus W$ – ортогональное разложение, $\|v\| = \|w\| \leq \|v'\|$ и $\|t\| \leq \|v'\|$. Поскольку $D^p f$ – функция класса C^{k-p}, $\|D^p f_v\|$ есть $o(\|v\|^{k-p})$ при $v \to 0$, а поэтому

$$\|f(v')\| \leq \|f(v)\| + |t| o(\|v'\|)^{k-1}$$

при $v' \to 0$. Но по условию $f(v) = 0$, и тем самым, как и требуется, $\|\frac{f(v')}{t}\| = o(\|v'\|^{k-1})$. □

Наконец, последнее утверждение это важный общий факт.

Предложение 1.4 (Лемма Морса.). *Пусть $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, причем в какой-то точке $x \in U$ имеем $f = Df = 0$. Пусть к тому же $Q = D^2 f_x \in S^2(V, \mathbb{R})$ – невырожденная квадратичная форма на V. Тогда существует такая система координат $y_1, \dots, y_n \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ в окрестности U' точки x – т.е. такие n функций, что $\langle y_1, \dots, y_n \rangle : U' \to \mathbb{R}^n$ есть диффеоморфизм – что*

$$f = \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm \dots \pm y_n^2 \tag{1.1}$$

при ограничении на U'.

Это утверждение важно вот почему. Во-первых, теория Морса долгое время был единственный вклад американцев в мировую математику, но это ладно. Во-вторых же, хорошо известно (а также следует из Леммы Морса), что если у функции f одной переменной производная обращается в точке x в ноль, а вторая производная ненулевая, то f имеет в окрестности x экстремум – или максимум, или минимум, в зависимости от знака $D^2 f_x$. В случае n переменных это уже неверно. Однако Лемма Морса показывает, что все не так плохо: возможно только $n+1$ разных вариантов, в зависимости от количества плюсов и минусов в (1.1), и топологию каждого из них можно подробно изучить, пользуясь явной формулой (1.1).

Замечание 1.5. Забегая сильно вперед, скажем также, что условие невырожденности второй производной это условие "общего положения": любую функцию можно сколь угодно малым изменением – говорят "малым шевелением" – привести к такому виду. Поэтому это условие не мешает изучать топологию. Заметим, что полностью устранить нули первой производной нельзя – если у функции есть максимум, то малым шевелением функции можно разве что немного сдвинуть его, но не уничтожить.

Доказательство Предложения 1.4 имитирует доказательство соответствующего "линейного" утверждения: любая невырожденная квадратичная форма Q на V имеет вид (1.1) в каком-то базисе $y_1, \dots, y_n \in V^*$. Напомним, вкратце, как это доказывается (см. также листок Алгебра 3): пользуемся индукцией по $n = \mathsf{dim}\, V$; берем вектор $v \in V$, для которого $Q(v) \neq 0$, и ортогональное разложение $V = v\mathbb{R} \oplus W$ по отношению к Q; по индукции, Q имеет вид (1.1) в ограничении на W; далее берем ортогональную проекцию $P : V \to W$, и полагаем $Q'(v) = Q(P(v))$. Осталось теперь доказать, что $Q - Q' = y_1^2$ для какого-то $y_1 \in V^*$, что сразу следует из ортогональности разложения $V = v\mathbb{R} \oplus W$.

Доказательство Предложения 1.4. Выберем вектор $v \in V$, для которого $D_v^2 f(x) \neq 0$. Обозначим $t = D_v f$.

Пусть сначала $\mathsf{dim}\, V = 1$. Тогда по Лемме 1.3 – примененной два раза – имеем $f = t^2 g$ для какой-то функции $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Кроме того, $g(0) = \frac{1}{2} D_v^2 f(0)$ по предположению не равно нулю – пусть например $g(0) > 0$. Уменьшая U, можно предполагать что и вообще $g > 0$. Но тогда $\sqrt{g}$ – хорошо определенная гладкая функция. Поэтому $y = t\sqrt{g}$ – тоже гладкая функция, что и требовалось.

В общем случае действуем индукцией по n. По теореме о неявной функции, можно полагать $x = 0$ и $V = v\mathbb{R} \oplus W$, причем t – проекция на первое слагаемое. Обозначим через P проекцию на второе слагаемое, и положим $f'(x) = f(P(x))$. Тогда $f - f'$ – гладкая функция, причем $f - f' = D(f - f') = 0$ на $W \subset V$. Поэтому $f = t^2 g$, и $g(0) = \frac{1}{2} D_v^2 f(0) \neq 0$. Пусть оно для определенности положительно; тогда оно положительно и в окрестности 0, а потому $y = \sqrt{g}t$ – гладкая функция в окрестности 0. $\square$

Замечание 1.6. При более аккуратном, и более муторном доказательстве – см. например учебник Зорича – можно доказать, что на самом деле достаточно $f \in C^3(U, \mathbb{R})$ (а координаты y_i тогда получаются класса C^2).