1 Лекция 4.

Пусть $U_1, U_2 \subset V$ – два открытых подмножества векторного пространства V, и пусть дан диффеоморфизм $\Phi : U_1 \to U_2$. Тогда пространства гладких функций на U_1 и на U_2 канонически отождествлены: для любого векторного пространства W, $f \mapsto f \circ \Phi$ дает изоморфизм между простраствами $C^k(U_1, W)$ и $C^k(U_2, W)$. Точка зрения, которой мы последовательно придерживаться в этом курсе, состоит в том, что и вообще, области U_1 и U_2 следует считать отождествленнными: по сути, это одна и та же область, просто заданы два разных вложения ее в векторное пространство V. Как мы видели, это полезно, поскольку с помощью теоремы о неявной функции и ее следствий можно иногда довольно сильно упростить задачу – например, если производная функции имеет постоянный ранг, можно просто считать функцию линейной. Но главное достоинство нашей точки зрения другое: она позволяет строить анализ для функций на топологических пространствах, которые вообще не вложены в векторное пространство; такое вложение задано только локально, в окрестности каждой точки.

Такое обобщение вполне естественно: анализ это наука локальная, и все определения все равно даются в окрестностях. И такое обобщение часто нужно на практике.

Вот самый простой пример того, что хочется уметь делать. Рассмотрим единичную сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Ее можно спроектировать на разные координатные гиперплоскости. В окрестности каждой точки, хотя бы одна из этих проекций будет взаимно-однозначна; но для каждой проекции есть "плохие" точки – а именно, точки на экваторе – в которых эта конкретная проекция плохая, т.е. не взаимно-однозначная ни в какой сколько угодно малой окрестности. Что такое функция класса C^k на сфере, совершенно понятно: надо потребовать, чтобы в хорошей окрестности каждой точки x и при хорошей проекции получалась функция класса C^k на соотвествующем открытом подмножестве координатной гиперплоскости. Но одной проекцией ограничиться нельзя – надо рассматривать их все, да еще проверить, чтобы понятие гладкости в окрестности точки не зависело от выбора хорошей проекции (их может быть несколько; а если точке на лежит ни на каком экваторе, то все проекции для нее равно хороши).

Чтобы систематически построить анализ на сфере и подобных объектах, надо развить некоторый формализм. Для начала надо четко определить эти объекты. Естественно ожидать, что они должны быть как минимум тпологическими пространствами; но ясно так же, что нужна какая-то дополнительная структура. Называются правильные объекты *многообразиями*. К ним есть два подхода – более современный, и более классический. Мы будем пользоваться классическим, но сначала скажем пару слов о современном.

Этот подход довольно радикальный (а развил соответствующую идеологию прежде всего А. Гротендик). Грубо говоря, он состоит в следующем: мы знаем по крайней мере одну вещь, которая одинакова для диффеоморфных областей – а именно, кольцо функций $C^k(U, \mathbb{R})$. Вот его и надо взять за основу, а все остальные структуры выводить из него.

Говоря же математическим языком, делается вот что.

Определение 1.1. Пусть дано топологическое пространство M. Говорят, что M *окольцованное пространство*, если для каждого открытого подмножества $U \subset M$ выделено подкольцо $\mathcal{A}(U) \subset C^0(U, \mathbb{R})$ в кольце непрерывных функций $U \to \mathbb{R}$, причем выполнены следующие условия согласования:

- Если $U' \subset U$ – два открытых подмножества, а функция f на U лежит в $\mathcal{A}(U)$, то ограничение f на U' лежит в $\mathcal{A}(U')$.

- Если какое-то множество U покрыто открытыми подмножествами $U_\alpha \subset U$, а функция $f \in C^0(U, \mathbb{R})$, будучи ограничена на любое $U_\alpha \subset U$, попадает в $\mathcal{A}(U_\alpha) \subset C^0(U_\alpha, \mathbb{R})$, то $f \in \mathcal{A}(U) \subset C^0(U, \mathbb{R})$.

Отображением окольцованных пространств M_1, M_2 называется такое непрерывное отображение $f : M_1 \to M_2$, что прообраз $g \circ f$ любой функции $g \in \mathcal{A}(U) \subset C^0(U, \mathbb{R})$ лежит в $\mathcal{A}(f^{-1}(U))$. Два окольцоанных пространства M_1, M_2 называются изоморфными, если дано обратимое отображение $f : M_1 \to M_2$, причем обратное отображение $f^{-1} : M_2 \to M_1$ – тоже морфизм окольцованных пространств.

На самом деле, определение Гротендика еще более общее – не требуется, чтобы кольца $\mathcal{A}(U)$ были вложены в $C^0(U, \mathbb{R})$; но для науки про гладкие многообразия такая большая общность не нужна. Набор $\mathcal{A}(U)$ – его называют структурным пучком – это часть структуры окольцованного пространства, поэтому для определенности иногда пишут $\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Очевидный пример окольцованного пространства это подмножество $U \subset V$ векторного пространства с пучком C^k (т.е. $\mathcal{A}(U) = C^k(U, \mathbb{R})$). Условия согласования выполнены: если функция класса C^k в окрестности каждой точки, она и всюду класса C^k. Вообще, открытое подмножество окольцованного пространства очевидно тоже есть окольцованное пространство.

Определение 1.2. Многообразием M размерности n класса гладкости C^k называется такое окольцованное хаусдорфово топологическое пространство $\langle M, C^k \rangle$, что у любой точки $x \in M$ есть окрестность $U \subset M$, изоморфная области $U \subset \mathbb{R}^n$ с пучком C^k.

Заметим, что дополнительные данные на топологическом пространстве M – это выбор подколец $C^k(U) \subset C^0(U)$; окрестности U и изоморфизмы их с областью в $\mathbb{R}^n$ держать в памяти не надо – важно лишь, что они существуют.

Довольно удивительным образом, этого определения оказывается для многого достаточно – можно определить производные функций и т.д. Но мы все же будем ближе к традиции, и основные определения будем давать в классическом изложении (иногда отмечая, как их переизложить по Гротендику). Классическое же изложение таково. Фиксируем размерность n и класс гладкости C^k.

Определение 1.3. *Картой* $\langle U, h_U \rangle$ на топологическом пространстве M называется открытое подмножество $U \subset M$ и непрерывное отображение $h_U : U \to \mathbb{R}^n$, которое есть гомеоморфизм на свой образ. Говорят, что две карты $\langle U_1, h_{U,1} \rangle$, $\langle U_2, h_{U,2} \rangle$ *согласованы*, если отображение $h_{U,2} \circ h_{U,1}^{-1} : h_{U,1}(U_1 \cap U_2) \to h_{U,1}(U_1 \cap U_2)$ есть диффеоморфизм класса C^k (это диффеоморфизм называется *функцией перехода* от одной кары к другой). *Атласом* на топологическом пространстве M называется набор попарно согласованных карт $\langle U_\alpha, h_\alpha \rangle$, покрывающий все M (т.е. $M = \bigcup U_\alpha$). Два атласа называются *эквивалентными*, если их объединение тоже атлас (т.е. любая карта первого аталас согласована с любой картой второго атласа).

Определение 1.4. Пусть дано хаусдорфово топологическое пространство M. Структура *многообразия размерности n класса гладкости C^k* на M задается классом эквивалентности атласов.

В этом определении, в отличие от гротендиковского, мы забываем про пучок колец на M, и вместо этого помним про набор локальных гомеоморфизмов $h_U : U \to \mathbb{R}^n$. При этом мы накладываем условие согласования на эти гомеоморфизмы.

Предложение 1.5. *Определение* 1.2 *эквивалентно определению* 1.4.

Прежде чем доказывать это, немного уточним определение 1.4. Говорят, что карта согласована с атласом, если она согласована с каждой картой этого атласа. Легко проверить, что если две карты согласованы с каким-то ataласом, то они согласованы и между собой (потому что соотвествующая функция перехода будет диффеоморфизмом в окрестности каждой точки). Поэтому к любому атласу можно добавить вообще все карты, с ним согласованные, и получить эквивалентный атлас, к которому ничего уже добавить нельзя: любая карта, с ним согласованная, ему принадлежит. Такой атлас называется *полным.* В каждом классе эквивалентности, очевидно, ровно один полный атлас; удобно в определении 1.4 убрать "класс эквивелентности" и потребовать, чтобы атлас был полным.

Доказательство. Мы покажем, как перейти от определения 1.2 к определению 1.4, а от определения 1.4 – к определению 1.2; проверку того, что конструкции действительно взаимно обратны, оставим в качестве упражения.

Пусть дано многообразие M в смысле определения 1.4. Скажем, что функция $f \in C^0(U, \mathbb{R})$ на открытом подмножестве $U \subset M$ класса C^k, если для любой карты $\langle U_\alpha, h_\alpha \rangle$ функция $h_\alpha^{-1} \circ f : h_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ класса C^k. Тогда $\langle M, C^k \rangle$ – многообразие в смысле определения 1.2 (условия ($\bullet$) очевидно выполнены, а любое $h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ – изоморфизм окольцованных пространств).

Наоборот, пусть дано многообразие M в смысле определения 1.2. Составим атлас из таких карт $\langle U, h_U \rangle$, что h_U – изоморфизм окольцованных пространств. Надо проверить, что все карты согласованы. По определению, любая функция перехода h переводит функции класса C^k в функции класса C^k; надо вывести из этого, что h – диффеоморфизм класса C^k. Но это почти тавтология. Выберем базис $x_1, \dots, x_n$ линейных функций на $\mathbb{R}^n$; тогда $h \circ x_i$ – функция класса C^k; тогда $\langle h \circ x_1, h \circ x_2, \dots, h \circ x_n \rangle : U \to \mathbb{R}^n$ тоже класса C^k, а это и есть наше отображение h. □

Замечание 1.6. Легко видеть, что в определении 1.4 на самом деле не нужно требовать, чтобы на M была задана структура топологического пространства: в определении карты слова "открытое" и "гомеоморфизм" можно временно забыть, условие согласования топологию на M не использует, а как только задан атлас U_α, топология восстанавливается однозначно (подмножество $U \subset M$ открыто тогда и только тогда, когда $h_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ открыто для любого α). В определении 1.2 топология наоборот важна. В качестве компенсации, не обязательно требовать, чтобы $\mathcal{A}(U)$ состояло из *непрерывных* функций: формально в определении окольцованного пространства это не требуется, а реально, гладкие функции будут непрерывными, поскольку они непрерывны на областях в $\mathbb{R}^n$, а условие непрерывности локально.

Как всегда в математике, определяя какие-то объекты, надо сразу определить подходящий класс отображений между ними. Для многообразий определение прямолинейно: если даны два многообразия M_1, M_2, то гладкое отображение между ними – это непрерывное отображение $f : M_1 \to M_2$, гладкое в локальных картах (т.е. для любых карт $\langle U_1, h_1 \rangle$ на M_1, $\langle U_2, h_2 \rangle$ на M_2, отображение $h_2 \circ f \circ h_1^{-1} : h_1(f^{-1}(U_2) \cap U_1) \to h_2(U_2)$ должно быть гладким). Эквивалентным образом, в гротендиковском определении надо потребовать, чтобы для любой функции $g \in C^k(U, \mathbb{R})$ на $U \subset M_2$, ее прообраз $f^*g = g \circ f \in C^0(f^{-1}(U), \mathbb{R})$ должен быть на самом деле гладкой функцией класса C^k.

Покажем теперь, как ввести структуру многообразия на сфере и подобных объектах (это еще одно применение теоремы о неявной функции).

Предложение 1.7. *Пусть f – функция на векторном пространстве V класса C^k, $k \geq 1$, пусть $M \subset V$ – множество нулей функции f, и пусть в каждой точке $m \in M$ производная Df_m не равна нулю. Тогда на M есть естественная структура многообразия класса C^k размерности* $\dim V - 1$.

Доказательство. Карты построим следующим образом. По теореме о неявной функции, у каждой точки $m \in M$ есть окрестность $U \subset V$, снабженная таким диффеоморфизмом $h_U : U \to V$, что $h_U^{-1} \circ M$ – линейная функция. Тогда h_U переводит пересечение $U \cap M$ в открытое подмножество гиперплоскости в V, и $\langle U \cap M, h_U \rangle$ – карта на M. Надо доказать, что две такие карты согласованы. Действительно, функция перехода $h_1 \circ h_2^{-1}$ – это диффеоморфизм окрестности 0 в $V = V' \oplus \mathbb{R}$ на другую окрестность, причем он согласован с проекцией на $\mathbb{R}$. Поэтому индуцированное отображение на пересечениях карт с V' – тоже диффеоморфизм. $\square$

Заметим, что в этой конструкции вместо функций $f \in C^k(V, \mathbb{R})$ можно брать функции $f \in C^k(V, W)$, производная которых сюръективна в каждой точке $m \in M = f^{-1}(0)$. В частности, если есть l функций $f_1, \ldots, f_l$, причем в каждой точке пересечения $f_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap f_l^{-1}(0)$ матрица производных $\langle Df_1, \ldots, Df_l \rangle V \to \mathbb{R}^l$ – сюръективное отображение (говорят, что $f_1^{-1}(0), \ldots, f_l^{-1}$ *пересекаются трансверсально*), то пересечение $f_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap f_l^{-1}(0)$ – многообразие размерности $n - l$.