1 Лекция 6.

Пусть M – многообразия, а f – гладкая функция на нем. На прошлой лекции мы показали, как придать смысл производной Df: производная это или функция на касательном расслоении TM, линейная по слоям, или сечение кокасательного расслоения T^*M. При этом все слои касательного расслоения разные, и все слои кокасательного расслоения тоже разные – нет никакого способа отождествить $T^*M \cong M \times \mathbb{R}^{n*}$ и думать про сечения $T^*M \to M$ как про графики функций $M \to \mathbb{R}^{n*}$. Кокасательное расслоение это набор векторных пространств $T^*_m M$, зависящих от точки $m \in M$; производная Df_m функции f в точке $m \in M$ лежит в пространстве $T^*_m M$, а производные Df_m, $Df_{m'}$ в разных точках $m, m' \in M$ лежат в *разных* векторных пространствах.

Оказывается, однако, что если удобным образом аксиоматизировать понятие "набора векторных пространств, параметеризованного точкой многообразия", то с объектами типа производной Df можно работать почти так же, как с обычными векторнозначными функциями.

Делается это так. Пусть дано множество M. *Группой над* M будем называть набор групп G_m, параметризованных элементами $m \in M$. Удобно немного изменить точку зрения: рассмотреть объединение $G = \bigcup_m G_m$, называемое *тотальным пространством* данной группы над M; при этом получаем естественную проекцию $\pi : G \to M$, переводящую любой элемент $g \in G_m \subset G$ в соответствующий элемент $m \in M$, и отдельные множества G_m восстанавливаются по паре $\langle G, \pi \rangle$ как слои проекции π: $G_m = \pi^{-1}(m) \subset G$. При этом по определению, для каждого элемента $m \in M$ задан "единичный элемент" $e_m \in G$, $\pi(e_m) = m$, и для любых двух элементов $g_1, g_2 \in G$, для которых $\pi(g_1) = \pi(g_2) = m$, задано произведение $g_1 g_2 \in \pi^{-1}(m) \subset G$, причем выполняются аксиомы группы. Для упрощения обозначений, иногда удобно еще рассмотреть "расслоенное произведение" $G \times_M G$, а именно, множество пар $\langle g_1, g_2 \rangle$ элементов G, для которых $\pi(g_1) = \pi(g_2) \in M$. Тогда структура группы над M на множестве G задается операциями $e : M \to G$ (единичный элемент) и $G \times_M G \to G$ (произведение); и надо требовать выполнения аксиом.

Заметим, что если дана группа G над M и другое множество M', снабженное отображением $\rho : M' \to M$, то множество $M' \times_M G$ с естественной проекцией $\pi' : M' \times_M G' \to M'$ это группа над M' – потому что каждый слой проекции π' это слой проекции π. Эта группа обозначается $\rho^* G$ и называется *обратным образом* группы G при отображении ρ (по-английски оно еще называется pullback). В частности, если $M' \subset M$, то $\pi^{-1}(M') \subset G$ – группа над M' (она еще обозначается $E |_{M'}$, или иногда просто $E_{M'}$). С другой стороны, если M точка, то группа G над M, а отображение $\rho : M' \to M$ для любого M' существует ровно одно; тогда для любого M' имеем $\rho^* G = M' \times G$. Такая группа над M' называется тривиальной.

Точно так же определяются абелевы группы над M, $\mathbb{R}$-векторные пространства над M, и их обратные образы.

Определение 1.1. Пусть дан набор векторных пространств E_m размерности r, параметризованных точками $m \in M$ многообразия M. Структура *векторного расслоения* на $\{E_m\}$ – это такая структура гладкого мнгообразия на тотальном простанстве $E = \bigcup_m E_m$, что естественная проекция $\pi : E \to E_m$ – гладкое отображение, и у любой точки $m \in M$ есть такая окрестность $U \subset M$, что существует изоморфизм $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^r$ (причем изоморфизм Φ_U уважает и структуру $\mathbb{R}$-векторного пространства над U, и структуру гладкого многообразия).

Отображения векторных расслоений определяются очевидным образом: это гладкие отображения $E_1 \to E_2$, которые уважают структуру векторного пространства над M (т.е. совместимы с проекциями $\pi_1 : E_1 \to M$, $\pi_2 : E_2 \to M$, и индуцируют линейное отображение $\pi_1^{-1}(m) \to \pi^{-1}(m)$ для каждой точки $m \in M$). Множество отображение из E_1 в E_2 обозначается через $\mathsf{Hom}(E_1, E_2)$. Отображения очевидно можно складывать и умножать на число (поточечно); поэтому $\mathsf{Hom}(E_1, E_2)$ это векторное пространство над $\mathbb{R}$ (довольно большое – как правило, бесконечномерное).

Обычно говорят "дано расслоение E на M", подразумевая, что дано и тотальное пространство E, и гладкая проекция $E \to M$, и структура векторного пространства на каждом слое $E_m \subset E$. Число r называется рангом расслоения E. Изоморфизмы Φ_U из определения 1.1 называются *локальными тривиализациями* расслоения E. Если даны две локальные тривиализации $\langle U_1, \Phi_1 \rangle$, $\langle U_2, \Phi_2 \rangle$, то их можно сравнить, рассмотрев отображение $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^r \to (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^r$. По условию, это отображение коммутирует с проекциями на $U_1 \cap U_2$, а в каждом слое получается линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Иными словами, для любых $u \in U_1 \cap U_2$ и $v \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(u \times v) = u \times \varphi_{12}(u)(v),$$

где $\varphi_{12} \in C^l(U_1 \cap U_2, \mathsf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ – некоторая гладкая функция на $U_1 \cap U_2$ со значениями в рпостранстве линейных отображений $\mathsf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Эта функция называется *функция перехода.*

Пусть теперь дано многообразие M и векторное пространство E над M, без какой-либо структуры многообразия. И пусть задано открытое покрытие U_α многообразия M и локальные тривиализации $\Phi_\alpha : E_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Когда можно дополнить эти данные до структуры векторного расслоения на E? Ответ очевидный: тогда и только тогда, когда соответствующие функции перехода $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathsf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ гладкие. Действительно, измельчая покрытие U_α, можно считать, что все U_α – карты многообразия M; тогда тривиализации Φ_α задают карты на E, и эти карты согласованы тогда и только тогда, когда $\varphi_{\alpha\beta} \in C^l(U_\alpha \cap U_\beta, \mathsf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathsf{Hom}^n))$. Это простое наблюдение довольно полезно. Например, получаем следующее.

Лемма 1.2. *Пусть E – векторное расслоение на многообразии M, и пусть дано многообразие M' и гладкое отображение $\rho : M' \to M$. Тогда обратный образ $\rho^* E$ имеет структуру векторного расслоения на M'.*

Доказательство. Выберем набор $\langle U_\alpha, \Phi_\alpha \rangle$ локальных тривиализаций E на M; тогда над $U'_\alpha = \rho^{-1}(U_\alpha)$ есть естественные локальные тривиализации для $\rho^* E$, а соответствующие функции перехода равны $\varphi'_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \rho$. Поскольку и $\varphi_{\alpha\beta}$, и ρ гладкие, $\varphi'_{\alpha\beta}$ тоже гладкие. □

Кроме того, можно определить для расслоений разные операции, которые определены для векторных пространств.

Лемма 1.3. *Пусть E, E' – векторные расслоения рангов r, r' на многообразии M. Тогда на множествах*

$$\begin{aligned} E \oplus E' &= \{\langle m, e \rangle, m \in M, e \in E_m \oplus E'_m\}, \\ E \otimes E' &= \{\langle m, e \rangle, m \in M, e \in E_m \otimes E'_m\}, \\ \mathcal{H}om(E, E') &= \{\langle m, e \rangle, m \in M, e \in \mathsf{Hom}(E_m, E'_m)\} \end{aligned}$$

есть естественная структура векторных расслоений на M, рангов $r + r'$, rr' и rr'.

Доказательство. Структура векторного пространства над M на этих множествах очевидна, а локальные тривиализации получаются из локальных тривиализаций для E и E' (измельчая покрытия, можно считать, что и E, и E' тривилизованы на множествах U_α и одного общего открытого покрытия многообразия M). Надо только проверить, что функции перехода гладкие. Действительно, эти функции таковы: $\varphi_{12} \oplus \varphi'_{12}$, $\varphi_{12} \otimes \varphi'_{12}$ и $\varphi^*_{12} \otimes \varphi'_{12}$ (в последнем случае мы использовали отождествление $\mathsf{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$, а $\varphi_{12}^*(u) \in \mathsf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ обоначает сопряженный оператор). $\square$

Обозначение $\mathcal{H}om(E,E')$ используется для того, чтобы отличать *расслоение* $\mathcal{H}om(E,E')$ от *векторного пространства*, к тому же бесконечномерного, всех линейных отображений из E в E'. Это вещи разные, хотя и связанные. Если $E' = \mathbb{R}_M$ – тривиальное расслоение ранга 1, то $\mathcal{H}om(E,E')$ обозначается E^* и называется *двойственным расслоением* к E. Пример такой ситуации – касательное и кокасательное расслоения (почему? – упражнение).

Замечание 1.4. Заметим, что сумма $E \oplus E'$ как множество есть просто расслоенное произведение $E \times_M E'$. Но уже тензорное произведение $E \otimes E'$ увидеть таким образом нельзя – нужно существенным образом использовать структуру векторного расслоения на E и E'.

Итак, мы дали формализацию интуитивного понятия "семейства векторных пространств, гладко зависящих от точки многообразия"; грубо говоря, векторные расслоения это обощение векторных пространств. Обобщение векторнозначных функций, в таком случае – это сечения расслоений.

Определение 1.5. Пусть дано расслоение E класса гладкости C^l на многообразии M, и открытое подмножество $U \subset M$. Сечением расслоения E на U называется сечение $U \to \pi{-}1(U)$ естественной проекции $\pi^{-1}(U) \to U$. Множество сечений E на U класса гладкости C^p, $p \leq l$, обозначается через $C^p(U,E)$.

Если расслоение E тривиально, $E \cong \mathbb{R}^n_M = M \times \mathbb{R}^r$, то любое сечение $s \in C^p(M,E)$ есть график функции $M \to \mathbb{R}^r$ того же класса гладкости C^p, т.е. $C^p(M,\mathbb{R}^n_M)$ это то же самое, что $C^p(M,\mathbb{R}^n)$. В общем случае такой интерпретации нет, но формальные свойства сохраняются. А именно, сечения можно складывать – поточечно – и умножать на число, тоже поточечно. Более того, число можно тоже выбирать зависящим от точки, т.е. сечение $s \in C^p(U,E)$ можно умножить на функцию $f \in C^p(U,\mathbb{R})$. На алгебраическом языке, говорят что $C^p(U,E)$ есть модуль над кольцом $C^p(U,\mathbb{R})$.

Лемма 1.6. *Пусть E, E' – векторные расслоения на многообразии M класса гладкости C^l. Тогда векторное пространство $\mathsf{Hom}(E,E')$ естественно отождествляется с векторным пространством $C^l(M,\mathcal{H}om(E,E'))$.*

Доказательство. Упражение. $\square$

В частности, множество гладких $\mathbb{R}$-значных функций на тотальном пространстве расслоения E – иными словами, множество отображений из E в тривиальное расслоение $\mathbb{R}_M$ – естественно отождаствлено с множеством сечение двойственного расслоения E^*. Поэтому наши два описания производной Df – как функции на TM, и как сечения T^*M – совершенно эквивалентны.

На практике, часто удобно варьировать определение 1.1: мы забываем про разные структуры на E, но требуем явного задания функций перехода, и накладываем условия на них. Один пример этого мы уже видели – можно забыть про структуру многообразия на E, если потребовать, чтобы функции перехода были гладкими. Другой пример: можно не требовать, чтобы на E была задана структура векторного раслоения – но тогда функции перехода *a priori* будут принимать значения в множестве *всех* гладких отображений из $\mathbb{R}^r$ в $\mathbb{R}^r$, и надо потребовать, чтобы для любой функции перехода φ_{12} и любой точки u отображение $\varphi_{12}(u) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ было линейно. Наконец, можно даже забыть про само множество E. Для этого заметим, что функции перехода удовлетворяют так называмому *условию коцикла*: для любых тривиализаций $U_1, U_2, U_3 \subset M$

$$\varphi_{23} \circ \varphi_{12} = \varphi_{13}.$$

Если просто задать многообразие M, открытое покрытие U_α и набор гладких функций $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathsf{Aut}(\mathbb{R}^r)$, удовлетворяющих условию коцикла – здесь $\mathsf{Aut}(\mathbb{R}^r) \subset \mathsf{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$ это множество *обратимых* линейных отображений – то из них можно склеить многообразие E, положив

$$E = \bigcup U_\alpha \times \mathbb{R}^r / \sim,$$

где $\langle u, v\rangle \sim \langle u, v'\rangle$ если $u \in U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi_{\alpha\beta}(v) = v'$. Условие коцикла гарантирует, что это действительно отношение эквивалентности, и что естественные отображения $U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to E$ задают на E структуру векторного расслоения.

Определение 1.7. По сути, именно так мы строили касательное и кокасательное расслоение. В дальнейшем мы дадим и более инвариантные конструкции, используя определение многообразий по Гротендику.

В жизни пользуются по мере необходимости всеми этими эквивалентными способами задавать расслоения; поэтому важно освоить переход от одного к другому и осознать, что получается одно и то же понятие.

Приведем теперь пример – по-видимому, самый простой из возможных – действительно нетривиального расслоения. В качестве M возьмем окружность S^1. Ранг будет 1. Покроем S^1 двумя отрезками U_1, U_2, причем пересечение $U_1 \cap U_2$ – несвязное объединение двух отрезков I, I'. Зададим функцию перехода φ_{12} так: на I это умножение на 1 (тождественное то есть отображение), а на I' – умножение на -1. Геометрически, тотальное пространство E соответствующего расслоения – лента Мебиуса (бесконечной ширины). И не существует никакого изоморфизма векторных расслоений $E \cong S^1 \times \mathbb{R}$. В самом деле, такой изоморфизм задавался бы в локальных тривиализациях функциями $h_1 : I_1 \to \mathsf{Aut}(\mathbb{R})$, $h_2 \to \mathsf{Aut}(\mathbb{R})$, причем $\varphi_{12} = h_1 \circ h_2^{-1}$ (говорят, что коцикл φ_{12} есть *кограница*). Но и h_1, и h_2 – это по определению функции со значениями в *ненулевых* вещественных числах, а потому обе имеют постоянный знак.

Касательное расслоение к сфере S^2 тоже нетривиально, но геометрически это увидеть не так легко, а доказать этого мы пока не можем (для этого нужен некоторый топологический аппарат).

Замечание 1.8. Но для тех, кто прорешал листок Геометрия 11, вот набросок доказательства: (1) покроем S^2 двумя дисками, которые пересекаются по маленькой окрестности экватора, (2) заметим, что если ограничить функцию перехода φ_{12} на экватор, то получится отображение $S^1 \to \mathbb{R}^2$, которое *не гомотопно тривиальному* (на самом деле, в естественных координатах это отображение просто отображает S^1 на единичную окружность в $\mathbb{C} \subset \mathsf{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, (3) получаем, что расслоение нетривиально – иначе $\varphi_{12} = h_2 \circ h_1^{-1}$, причем и h_1, и h_2 гомотопны нулю.

Закончим эту лекцию одним важным замечанием. Для любого открытого $U \subset M$, любое отображение $e : E_1 \to E_2$ из расслоения E_1 в расслоение E_2 индуцирует линейное отображение пространств сечений $e : C^l(U, E_1) \to C^l(U, E_2)$. Эти отображения совместимы с ограничениями на подмножества. Однако не любой набор линейных отображений $C^k(U, E_1) \to C^k(U, E_1)$, даже и совместимый с ограничениями, происходит из отображения расслоений! Важный контрпример – это операция взятия производной, которая по функции $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ строит ее производную $Df \in C^{k-1}(U, T^*M)$: никакого отображения расслоений $\mathbb{R} \to T^*M$, индуцирующего эту операцию, нет. Причина этого простая. Любой набор линейных отображений $e : C^k(U, E_1) \to C^k(U, E_2)$, совместимый с ограничениями – такой набор называется *отображением пучков сечений*, или иногда *локальным оператором* – котороый происходит из отображения расслоений, по определению совместим со структурой $C^k(U, \mathbb{R})$-модуля на обеих частях: имеем $e(fs) = fe(s)$ для любых $s \in C^k(U, E_1)$ и $f \in C^k(U, \mathbb{R})$. В то же время, отображение дифференцирования $f \mapsto Df$ со структурой модуля не совместимо (потому что $D(fg)$ равно $fDg + gDf$, а не fDg).