1 Лекция 7.

На прошлой лекции мы определили абстрактное понятие векторного расслоения на многообразии, и построили для каждого многообразия M два конкретных примера векторных расслоений: касательное расслоение TM и кокасательное расслоение T^*M. При этом мы думали про многообразие в терминах карт, и строили TM, склеивая его из кусков, отвечающих разным картам. Это конструкция удобная, но несколько неуклюжая. Сейчас мы покажем, как, интерпретируя многообразие по Гротендику, определить касательное и кокасательное расслоения более инвариантно.

Начнем с кокасательного расслоения. Итак, нам дано многообразие M, понятное по Гротендику – т.е. хаусдорфово топологическое пространство M, снабженное пучком колец $C^\infty(U,\mathbb{R}) \subset C^0(U,\mathbb{R})$. Докажем прежде всего следующую простую, но очень важную лемму.

Лемма 1.1. *Пусть дано открытое подмножество $U \subset M$, точка $x \in U$ и гладкая функция $f \in C^k(U,\mathbb{R})$. Тогда существует такая гладкая функция $g \in C^k(M,\mathbb{R})$, что $f = g$ в некоторой окрестности $U' \subset U$ точки x.*

Доказательство. Уменьшая при необходимости множество U, можно предполагать, что (1) U это карта для M, и (2) $h(U) \subset \mathbb{R}^n$ это открытый шар $B_\varepsilon(0)$ с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$, а $h(x) = 0$. Определим функцию $\psi : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\psi(v) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{2}{3}\varepsilon \le \|v\| \le \varepsilon, \\ 1, & \text{если } 0 \le \|v\| \le \frac{1}{3}\varepsilon, \\ \psi_0\left(3\frac{\|v\|}{\varepsilon} - 1\right), & \text{если } \frac{1}{3}\varepsilon \le \|v\| \le \frac{2}{3}\varepsilon, \end{cases}$$

где $\psi_0 \in C^\infty(I,\mathbb{R})$ – такая гладкая функция на отрезке, что $\psi_0(0) = 1$, $\psi_0(1) = 0$, а все производные $D^k\psi_0(x)$ обращаются в ноль при $x = 0, 1$. Например, можно взять

$$\psi_0(x) = 1 - \arctan(\tan(x)\exp(\tan^2(x))).$$

Тогда $\psi \in C^\infty(h(U),\mathbb{R})$, причем $\psi = 1$ в шаре $B_{\frac{1}{3}\varepsilon}(0)$, и $\psi = 0$ вне шара $B_{\frac{2}{3}\varepsilon}(0)$. Положим $U' = h^{-1}(B_{\frac{1}{3}}(0))$, возьмем $g = \psi f$ на U, и продолжим g нулем на все M. □

Рассмотрим теперь кольцо $C^\infty(M,\mathbb{R})$ гладких функций на M, и для каждой точки $x \in M$ и целого числа $k \ge 1$, обозначим через $\mathfrak{m}_x^{(k)} \subset C^\infty(M,\mathbb{R})$ подпространство таких функций, что $f(x') = o(\|x' - x\|^{k-1})$ при $x' \to x$ (говорят "обращается в ноль до k-го порядка"). Заметим, что это условие задается в локальной карте, но от выбора карты очевидным образом не зависит.

Определение 1.2. *Пространством k-струй* функций на M в точке x называется фактор-пространство $C^\infty(M,\mathbb{R})/\mathfrak{m}_x^{(k+1)}$. Пространство k-струй в x обозначается $J_x^k(M)$.

Заметим, что пространство 0-струй $J_x^0(M)$ канонически отождествлено с $\mathbb{R}$ – разность двух функций $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ по определению лежит в $\mathfrak{m}_x^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $f_1(x) = f_2(x)$.

Предложение 1.3. *Ядро естественного отображения $J_x^1(M) \to J_x^0(M)$ канонически изоморфно кокасательному пространству T_x^*M. Ядро естественного отображения $J_x^{k+1}(M) \to J_x^k(M)$ канонически изоморфно симметрической степени $S^kT_x^*M$.*

Доказательство. В силу Леммы 1.1, пространства струй не изменятся, если M заменить на любое открытое подмножество $U \subset M$. Поэтому можно предполагать, что U – область в векторном пространстве V, а $x = 0 \in U \subset V$. Теперь замечаем, что по определению, любую k-струю можно единственным образом представить линейной комбинацией полиномиальных функций степени не больше k, а потому

$$J_0^k(V) = \bigoplus_{0 \le l \le k} S^l V^*. \tag{1.1}$$

Осталось проверить, что отождествления канонические, т.е. сохраняются диффеоморфизмами. Достаточно проверить, что вложение $T_0^* V \to J_0^1 V$ каноническое – все остальные получаются из него по мультипликативности. Это следует прямо из определения: для любой линейной функции f на V и любого диффеоморфизма $\Phi : U \to U' \subset V$, $\Phi(0) = 0$, функция $(f \circ \Phi)$ в нуле равна $D\Phi_0^*(f)$ с точностью до членов второго порядка малости. □

Заметим, что разложение в прямую сумму (1.1) *не сохраняется диффеоморфизмами*, кроме одного случая: всегда имеем каноническое отображение $J_x^0(M) \to J_x^k(M)$. Действительно, $J_x^0(M) = \mathbb{R}$ отображается даже в $C^\infty(M, \mathbb{R})$ – а именно, отождествляется с подпространством постоянных функций. Пространство $T_x^* V$ можно естественно отождествить с подпространством *линейных* функций в $C^\infty(U, \mathbb{R})$, но это подпростанство уже зависит от выбора системы координат – диффеоморфизм не обязан переводить линейную функцию в линейную.

Предложение 1.3 позволяет совершенно инвариантно, без выборов определить семейство векторных пространств $J_x^k(M)$, параметризованных точками $x \in M$. В частности, поскольку $J_x^1(M) = T_x^* M \oplus \mathbb{R}$, восстанавливаем кокасательное расслоение $T^* M$.

Упражнение 1.4. *Используя карты, постройте на $J^k(M)$ структуру векторного расслоения на M. Это расслоение называется расслоением k-струй.*

Расслоение k-струй позволяет разобраться с тем, как придать смысл старшим производным функций на многообразии. А именно, пусть дана функция $f \in C^\infty(M)$. Для каждой точки $x \in M$, определим $D^{\le k} f_x \in J_x^k(M)$ как образ f при естественном отображении $C^\infty(M) \to J_x^k(M)$. Покрывая M картами, легко проверить, что все $D^{\le k} f_x$ вместе задают гладкое сечение $D^{\le k} f \in C^\infty(M, J^k(M))$ расслоения струй $J^k(M)$. Поскольку $J^1(M) \cong T^* M \oplus \mathbb{R}_M$, канонически имеем $D^{\le 1} f = Df \oplus f$. Но поскольку при $k > 1$ разложение (1.1) на сохраняется диффеоморфизмами, никакого смысла выражениям $D^k f$, $k \ge 2$ придать *нельзя*. Определена только "производная порядка до k" $D^{\le k} f$.

Единственное исключение из этого правила – это если для какой-то функции f производная D^{k-1} "порядка до $k-1$ включительно" обращается в ноль в точке $x \in M$. Тогда, поскольку ядро отображения $J_x^k(M) \to J_x^{k-1}(M)$ отождествлено с $S^k T_x^* M$ *канонически*, хороша определена производная k-го порядка $D^k f_x = D^{\le k} f_x \in S^k T_x^* M$. Вот это наблюдение, переделанное в мантру: "если первые $k - 1$ производных в точке обращаются в ноль, то k-я производная в этой точке хорошо определена". На практике, важный пример такой ситуации возникает при $k = 2$. Если $Df_x = 0$ в какой-то точке $x \in M$ – говорят, что точка x *критическая* для функции f – то вторая производная $D^2 f_x$ – хорошо определенная симметрическая билинейная форма на касательном пространстве $T_x M$. Эта форма называется *гессианом* функции f в критической точке x.

Заметим теперь следующее. В интерпретации через расслоение струй, производная определяется почти тавтологически: как только мы договоримся, какие функции на M считать гладкими, и какие функции обращаются в ноль до первого порядка в каждой точке $x \in M$, и кокасательное расслоение $T^* M$, и операция дифференцирования $D : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to$

$C^\infty(M, T^*(M))$ возникают сами собой. Оказывается, что эту точку зрения можно продвинуть еще на шаг. А именно, операция взятия производной вполне определяется тем, что удовлетворяет правилу Лейбница $D(fg) = fD(g) + gD(f)$.

Предложение 1.5. *Пусть E – векторное расслоение на многообразии M, и пусть задано линейное отображение $D' : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, E)$, удовлетворяющее правилу Лейбница $D'(fg) = fD'(g) + gD'(f)$. Тогда существует единственное отображение расслоений $\varphi : T^*M \to E$, для которого $D'(f) = \varphi(D(f))$.*

Заметим, что это Предложение можно использовать в качестве еще одного определения кокасательного расслоения: если бы были два расслоения, удовлетворяющие этому универсальному свойству, то просто по определению они были бы канонически изоморфны.

Замечание 1.6. В алгебре, любое отображение $D : A \to M$ из коммутативного кольца A в модуль M над кольцом A, удовлетворяющее правилу Лейбница $D(ab) = aD(b) + bD(a)$, называют *дифференцированием* со значениями в модуле M. Тогда Предложение 1.5 можно коротко сформулировать так: операция взятия производной $D : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, T^*M)$ есть универсальное дифференцирования кольца $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Чтобы доказать Предложение 1.5, нам понадобится следующий факт.

Лемма 1.7 (Лемма Адамара). *Пусть $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ – такая гладкая функция на окрестности $U \subset V$ ноля в векторном пространстве V, что $f(0) = 0$. Тогда для любого набора координат $x_1, \dots, x_n \in V^*$ существуют такие функции $g_i \in C^{k-1}(U', \mathbb{R})$ на возможно меньшей окрестности $U' \subset V$, что*

$$f = g_1 x_1 + \dots + g_n x_n, \tag{1.2}$$

причем $g_i(0) = D_{v_i}(f)(0)$, где $v_1, \dots, v_n \in V$ – двойственный базис.

Доказательство. Разложение (1.2) строим индукцией по n. Ограничим f на гиперплоскость $V' \subset V$ заданную уравнением $x_1 = 0$, разложим ее по индуцкии, далее напишем $f' = f - f \circ P$, где $P : V \to V'$ – естественная проекция. Тогда $f \circ P$ тоже разложено по индукции, а $f' = 0$ на V'. По Лемме из лекции 3, имеем $f' = x_1 g_1$, причем $g_1 \in C^{k-1}(U', \mathbb{R})$. Наконец, $g_i(0)$ легко вычислить, вычисляя по правилу Лейбница $D_{v_i}(f)$. $\square$

Следствие 1.8. *Для любого многообразия M и точки $x \in M$, подпростанство $\mathfrak{m}_x^{(2)} \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ порождено линейными комбинациями функций из $\mathfrak{m}_x^{(1)}$ (пишут $\mathfrak{m}_x^{(2)} = \mathfrak{m}_x^2$, где $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x^{(1)}$).*

Доказательство. Если M – область в $\mathbb{R}^n$, это немедленно следует из Леммы Адамара; в общем случае надо применить Лемму 1.1. $\square$

Доказательство Предложения 1.5. Сначала выберем точку $x \in M$ и построим отображение $\varphi_x : T_x^*M \to E_m$. Для этого заметим, что по следствию из Леммы Адамара отображение $D' : C^\infty(M) \to C^\infty(M, E) \to E_x$ обращается в ноль на $\mathfrak{m}_x^{(2)} \subset C^\infty(M)$ – действительно, достаточно доказать, что $D'(f_1 f_2)_x = 0$ для любых $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}_x^{(1)}$, а это следует из правила Лейбница. Ограничивая D' на $\mathfrak{m}_x^{(1)} \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$, получаем каноническое отображение

$$\varphi_x : \mathfrak{m}_x^{(1)} / \mathfrak{m}_x^{(2)} \to E_x, \qquad \varphi_x(f) = D'(f)_x.$$

По построению имеем $D'(f)_x = \varphi(Df_x)$ для любой точки $x \in M$, то есть $D'f = \varphi(Df)$. Осталось доказать, что φ – гладкое отображение. Действительно, в окрестности каждой точки $x \in M$ можно выбрать карту, а в ней систему координат x_i. Продолжая x_i на все M по Лемме 1.1, получаем такие функции $x_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, что $Dx_i : \mathbb{R}^n_M \to T^*M$ задает гладкую тривиализацию кокасательного расслоения в окрестности $U \subset M$ точки x. Но поскольку $\varphi(Dx_i) = D'(x_i)$ – по условию гладкое сечение E, то в этой тривиализации $\varphi : \mathbb{R}^n_U \cong T^*U \to E$ задается набором гладких сечений – а следовательно, представляет собой гладкое отображение. $\square$

Особенно важный частный случай этого предложения такой. Пусть $E = \mathbb{R}_M$ – тривиальное расслоение ранга 1. Тогда отображение $\varphi : T^*M \to E$ это то же самое, что сечение двойственного расслоения к T^*M – т.е. касательного расслоения TM.

Определение 1.9. Сечение $\xi \in C^\infty(M, TM)$ касательного расслоения TM называется *векторным полем* на многообразии M.

Каждое векторное поле ξ определяет отображение $D_\xi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ по правилу $D_\xi(f) = \langle \xi, Df \rangle$ (здесь $\langle -, - \rangle$ обозначает естественное спаривание двойственных векторных пространств). Отображение D_ξ называется *производной Ли* вдоль векторного поля ξ. Заметим, что это обобщение частной производной: если $M = U \subset V$ – область в векторном простанстве, то $TU = U \times V$, и каждый вектор $v \in V$ задает *постоянное* векторное поле $\xi_v \in C^\infty(U, TU)$; тогда $D_{\xi_v} = D_v$. Предложение 1.5 показывает, что производная Ли – это самое сильное обобщение понятия частной производной, которое только может быть: любое линейное отображение $D' : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$, удовлетворяющее правилу Лейбница, имеет вид $D' = D_\xi$ для какого-то векторного поля $\xi \in C^\infty(M, TM)$.