1 Лекция 9.

На прошлой лекции мы разобрались с тем, как дифференцировать дифференциальные формы; поговорим теперь немного о том, как их интегрировать. Наша цель – не построить полноценную теорию интегрирование (это вне рамок данного курса), а описать, что в принципе существует, зачем оно нужно, какой геометрической интуиции оно отвечает, и какие возникают тонкие места, если пытаться эту геометрическую интуицию формализовать.

Геометрически, интеграл формализует понятие объема (а также площади и длины).

Пусть даны n линейно-независимых векторов $v_1, \dots, v_n$ в n-мерном векторном пространстве V. На их можно натянуть параллелепипед. Интутивное понятие объема этого параллелипипеда хорошо описывается, если сопоставить ему вектор $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \Lambda^n V$ в одномерном векторном пространстве $\Lambda^n V$. Так, если параллелепипед разбит на несколько меньших, то соответствующие вектора $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ складываются, и т.д. При этом никакого *числа* параллелипипеду сопоставить нельзя. Чтобы иметь возможность говорить про объем как про число, надо выбрать изоморфизм $\Lambda^n V \to \mathbb{R}$ – иными словами, ненулевой элемент $\omega \in \Lambda^n V^*$ двойственного векторного пространства $(\Lambda^n V)^* \cong \Lambda^n V^*$. Такой элемент ω называется *формой объема* на V.

Соответственно, если M – гладкое многообразие размерности n, то *формой объема* на нем называется n-форма $\omega \in \Lambda^n T^* M$, которая ни в одной точке $m \in M$ не обращается в ноль. Многообразие, которое допускает форму объема, называется *ориентируемым*.

Замечание 1.1. Если векторное пространство V снабжено евклидовой метрикой, то можно дополнительно потребовать, чтобы форма объема ω на нем была длины 1 по отношению к естественной метрике на $\Lambda^n V$, $\|\omega\| = 1$. Таким образом, на евклидовом пространстве форма объема определена однозначно *с точностью до знака.* Мы знаем, что любое разумное многообразие M допускает риманову метрику; но из-за этого самого знака отсюда не следует, что любое многообразие ориентируемое. Это и не верно. Простейшие неориентируемые многообразия возникают уже в размерности 2 (*вещественная проективная плоскость*, которая получается, если на сфере S^2 отождествить каждую точку с диаметрально противоположной, а также чуть более сложно строящаяся *бутылка Клейна*).

Цель теории интегрирования – это сопоставить каждому компактному многообразию M и каждой форме объема ω на M число, называемое *интегралом* $\int_M \omega$. Чуть шире, в построении интеграла можно не требовать, чтобы ω была формой объема – допускаются любые n-формы, даже и обращающиеся в 0. Тогда можно рассматривать и некомпактные M – важно только, чтобы ω было равно 0 вне компактного подмножества. При этом операция интегрирования должна удовлетворять естественным свойствам (интегрирование должно быть линейно по ω; если разбить M на два куска, то интеграл должен быть суммой интегралов по двум кускам). Если же M – параллелепипед $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ в векторном пространстве V, а ω – постоянная форма объема на V, то $\int_M \omega$ должно быть уже известным нам числом $\omega(v_1, \dots, v_n)$.

В принципе, на этом месте можно закончить определения и строить операцию интегрирования чисто аксиоматически (надо только добавить надлежащим образом сформулированное свойство “непрерывности” по ω – если мы мало изменяем форму ω, инетграл $\int_M \omega$ должен мало измениться). Но сделать это аккуратно и вправильной общности оказывается не так-то легко.

Попробуем разобрать одномерный случай $M = \mathbb{R}$. Лучше даже, пусть M будет отрезком $I = [0, C]$, а все гладкие функции, формы и т.д. на M будем предполагать определенными в каком-то чуть большем интервале $]-\varepsilon, C + \varepsilon[$ (чтобы они были гладкими и в концах отрезка). Пусть $\alpha \in C^\infty(I, T^* I)$ – гладкая 1-форма на I. Как определить $\int_I \alpha$? Основная идея совершенно понятна. Поскольку форма α гладкая, локально возле любой точки m она близка к постоянной форме $\alpha_m \in T^*M$ на T_mI; а как вычислять интеграл постоянной формы, мы знаем. Поэтому надо разбить отрезок I на маленькие отрезки, приблизить α постоянной формой на каждом из них, и просуммировать получившиеся интегралы.

Если действовать формально, то назовем *ε-разбиением* отрезка I такой набор чисел $0 = a_1 < \dots < a_{N+1} = C$, что $|a_i - a_{i+1}| < \varepsilon$, $1 \leq i \leq N$. Для каждого ε-разбиения $\overline{a}$, рассмотрим *интегральную сумму*

$$\sum_{\overline{a}} \alpha = \sum_i |a_i - a_{i+1}| \cdot \alpha(a_{i+1} - a_i),$$

где мы понимаем $a_{i+1} - a_i$ как касательный вектор в точке a_i, и назовем интегралом $\int_I \alpha$ предел интегральных сумм при $\varepsilon \to 0$. Это так называемый *интеграл Римана.*

Сразу видно, что с этим определением что-то не так: по какому, собственно, параметру мы переходим к пределу? При любом ε существует много ε-разбиений, в каком-то смысле тем больше, что меньше ε (потому что при малом ε должно быть большим число точек N). Чтобы бороться с этим, можно например действовать так.

Лемма 1.2. *Для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых двух ε-разбиений $\overline{a}$, $\overline{a}'$ отрезка I имеем*

$$\left| \sum_{\overline{a}} \alpha - \sum_{\overline{a}'} \right| < \delta.$$

Доказательство. Упражнение. Указание: легко видеть, что достаточно рассмотреть случай, когда $\overline{a}'$ есть подразбиение $\overline{a}$, т.е. любая точка из $\overline{a}$ встречается также и в точках $\overline{a}'$. Далее можно оценить разность двух интегральных сумм по отдельности на каждом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$, используя гладкость α и теорему и малом приращении. $\square$

Из этой Леммы вытекает, что множество всех интегральных сумм для всех ε-разбиений лежит в некоторм δ-шаре, причем если ε стремится к нулю, то δ становится сколь угодно мало. Поэтому пересечение всех этих δ-шаров состоит из одного-единственного числа – которое и есть $\int_I \alpha$.

Таким образом формальную проблему с этим определением можно решить. Остаются существенные проблемы, которые таковы. Во-первых, требование *гладкости* α излишне сильное; на практике часто нужно – и можно – интегрировать формы не только не гладкие, но даже и не непрерывные. Во-вторых, определение дано нами для отрезка. Его сравнительно легко обобщить на параллелепипед – разбивая его на меньшие параллелепипеды по каждой из координат. Но эта процедура разбиения существенно использует систему координат. Посмотреть, что происходит при замене координат, и склеить определение для многообразий – это крайне мутная комбинаторная процедура. Человек достаточно усидчивый может быть и может ее проделать; но времени его на это потраченного, очень жалко, поскольку понятно, что все эти комбинаторные сложности совершенно не по делу – это просто артефакт процедуры. А ведь можно еще и на треугольники разбивать – и придется проверять, что получается то же самое... На самом деле, существует более инвариантная и концептуальная процедура интегрирования, которая – совсем грубо говоря – состоит в том, что надо позволить разбивать не только на прямоугольники и треугольники, а вообще на что угодно, причем в бесконечном числе. Как это часто бывает, при таком максимальном обобщении суть теории проясняется, а доказательства на самом деле становятся даже проще.

Соответствующая наука называется *теория меры*; по ней будет прочитан отдельный курс.

Пока что, отметим следующий совершенно фундаментальный факт.

Предложение 1.3 (Формула Ньютона-Лейбница). *Пусть F – гладкая функция на отрезке $I = [0, C]$. Тогда*

$$\int_I dF = F(C) - F(0).$$

Доказать это, используя понятие интеграла Римана, несложно: для линейных функций утверждение очевидно, для произвольных берем ε-разбиения, заменяем интеграл на интегральную сумму, и доказываем, что разность левой и правой части стремится к 0 когда $\varepsilon \to 0$. Практически все, изучающие анализ одной переменной, воспринимают это формулу как нечто очевидное, почти тавтологичное. Это не совсем правильно. Исторически, формула Ньютона-Лейбница это важное достижение: две совершенно разные операции, дифференцирование и интегрирование – которые к тому же формализуют совершенно разные геометрические и физические понятия – оказываются взаимно обратными.

Чтобы увидеть обратное соотвествие, кстати, надо доказать, что $\int_{[0,C]} \alpha$, *рассмотренный как функция от* $C \in \mathbb{R}$ – гладкая функция $F(C)$. Тогда из формулы Ньютона-Лейбница немедленно следует, что $dF = \alpha$ (говорят, что функция F – *первообразая* для формы α; тем самым, процедура интегрирования показывает, что у каждой 1-формы на $\mathbb{R}$ есть первообразная).

При обобщении на высшие размерности становится ясно, что интеграл и производная это вещи даже на формальном уровне разные, хотя и связанные. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница называется *формулой Стокса.* Чтобы удобно софрмулировать ее, слегка обобщим понятие интеграла. Для каждого k обозначим через I^k единичный k-мерный куб; элементарным циклом размерности k на многообразии M будем называть гладкое отображение $\varphi : I^k \to M$; *циклом* размерности k на многообразии M будем называть формальную линейную комбинацию элементарных циклов. Тогда для любого цикла $[C] = a_1\varphi_i + \dots + a_N\varphi_N$ на M можно чисто формально определить интеграл $\int_{[C]} \alpha$ любой k-формы α на M формулой

$$\int_{[C]} \alpha = a_i \sum \int_{I^k} \varphi_i^* \alpha.$$

Это по сути не более чем обозначение, но оно упрощает формулы. А именно, *границей* $\partial\varphi$ элементарного цикла $\varphi : I^k \to M$ будем называть цикл

$$\partial\varphi = \sum_{1 \le i \le k} \varphi_1^i - \varphi_1^i,$$

гд φ_0^i, φ_1^i – ограничение отображения φ на грань куба I^k, состоящую из точек где i-я координата равна соответственно 0, 1. По линейности, понятие границы продолжается на неэлементарные циклы.

Предложение 1.4 (Формула Стокса). *Для любого k-цикла $[C]$ на M и любой $(k-1)$-формы α на M, имеем*

$$\int_{[C]} d\alpha = \int_{\partial[C]} \alpha.$$

Мы этого доказывать не будем, потому что – как обьяснено выше – понятное доказательство трудно дать, не используя понятное и удобное определение интеграла; отметим только, что формула Ньютона-Лейбница получается из этой формулы при $k = 1$ (граница отрезка это формальная разность двух точек, интеграл функции по точке это просто ее нзачение в этой точке – поэтому правая чать формулы Стокса превращается в $F(1) - F(0)$).

Вообще говоря, можно было бы и вовсе интеграл в рамках настоящего курса не упоминать. Мы сделали это, потому что с помощью интегрирования – причем достаточно интерирования по одной переменной – мы сможем разъяснить геометрический смысл векторных полей.

Вспомним, что когда мы рассматривали гладкие функции на векторном пространстве V, один из способов определить производную – вернее, частную производную вдоль вектора $v \in V$ – был основан на том, чтобы рассмотреть параллельные переносы T_{tv} на вектора, пропорциональные v. Оказывается, что эту процедуры тоже крайней осмысленно обощить. А именно, пусть дано гладкое многобразие M.

Определение 1.5. *Однопараметрической группой диффеоморфизмов* многобразия M, или *потоком* на M называется такое гладкое отображение $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$, что для любого $t \in \mathbb{R}$ индуцированное отображение $\Phi_t : M - M \times \{t\} \to M$ есть диффеоморфизм, причем для любых двух t, t имеем $\Phi_t \circ \Phi_{t'} = \Phi_{t+t'}$.

Иными словами, аддитивная группа поля $\mathbb{R}$ действует на M, причем каждый элемент $t \in \mathbb{R}$ действует диффеоморфизмом Φ_t, и этот диффеоморфизм Φ_t гладко зависит от t. Так, параллельные переносы T_{tv} очевидно образуют однопараметрическую группу.

Замечание 1.6. Поток по-английски будет flow. К сожалению, по-русски потоком называется еще и совершенно другая вещь, которая по английски будет current. К счастью, в ближайшие полгода она нам точно не понадобится.

Лемма 1.7. *Пусть α – какой-то гладкий ковариантный тензор на M (функция, дифференциальная форма, риманова метрика и т.д.). Тогда для любого потока Φ_t существует предел*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\Phi_t^* \alpha - \alpha).$$

Доказательство. Упражение. □

Этот предел называется *производной Ли* тензора α вдоль потока Φ_t. Кажется, что возникает новое понятие дифференцирования, но это не вполне так: по крайней мере для функций понятие то же самое. Действительно, заметим, что в каждой точке $m \times \{0\} \in M \times \mathbb{R}$ у нас есть канонический касательный вектор – единичный касательный вектор вдоль $\mathbb{R}$. Обозначим его через e_t.

Определение 1.8. *Касательным векторным полем* потока $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ называется векторное поле $\xi = \xi(\Phi)$, зданное как

$$\xi_m = D\Phi_m(e_t).$$

Лемма 1.9. *Пусть Φ_t – поток на M с касательным векторным полем ξ. Тогда производная Ли вдоль Φ_t любой функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ равна частной производной $D_\xi f$.*

Доказательство. Упражение. □

Но что-то новое мы все же получили: прояснили геометрический смысл чстной производной, и определили частные производные не только функций, но и других ковариантных тензоров – форм, метрик и т.д. Все это для векторные полей, которые касательно к какой-то группе диффеоморфизмов. Насколько общее это явление? Оказывается, что максимально общее: любое векторное поле многобразии происходит из однопараметрической группы (возможно, правда, что Φ_t определено только для маленьких t, а если M некомпактно, то и только в окрестности каждой его точки). Кроме того, такая группа определена однозначно (Иногда говорят, что "векторное поле есть инфинитеземальный диффеоморфизм", и что "локально векторное поле интегрируется до потока"). Это вытекает из следующего фундаментального факта.

Предложение 1.10 (Существование и единственность решений дифф. уравнений).

Пусть $U \subset V$ – область в векторном пространстве, $I \subset \mathbb{R}$ – интервал вещественной прямой, а ξ – векторное поле на $U \times I$, которое вертикально вдоль слоев проекции $U \times I \to I$. Рассмотрим поле $\xi + e_t$ на $U \times I$. Тогда в любой точке $x \in U \times I$ существует такая система координат $\Phi : U' \times I' \to U \times I$, $U' \subset V$, $I' \subset I$, совместимая с проекциями на $\mathbb{R}$, что Φ переводит $\xi + e_t$ в постоянное векторное поле $\partial/\partial t$.

В следующей, последней Лекции мы докажем это Предложение. Начнем с того, что объясним, какое оно имеет отношение к однопараметрическим группам (а заодно и к дифференциальным уравнениям, и их решениям). Закончим тем, что выведем из этого утверждения полезные геометрические следствия.