Анализ, 2й семестр, курс по дифференциальному исчислению.

Экзамен полудомашний – задачи можно сдавать в среду 23 марта и в четверг 24 марта. Задачи сдаются устно. При этом могут быть заданы дополнительные теоретические вопросы. Для сдачи экзамена достаточно сдать 2 задачи (это оценка "3"); чтобы получить "4", надо решить 3 задачи, чтобы получить "5" – соответственно, четыре задачи.

Задача 1. Пусть $f(x_1, x_2)$ – вещественнозначная функция двух переменных (иными словами, отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(а) Пусть f непрерывна, класса гладкости C^1 вне $0 \in \mathbb{R}^2$, и пусть и $\partial/\partial x_1 f$, и $\partial/\partial x_2 f$ хорошо определены в $0 \in \mathbb{R}^2$. Верно ли, что f класса гладкости C^1 всюду на $\mathbb{R}^2$? Верно ли это, если еще предположить, что $D_v f$ хорошо определено в 0 для любого вектора $v \in \mathbb{R}^2$?

(б) Пусть f класса C^1 всюду, и класса C^2 вне нуля, и пусть $\partial/\partial x_1 \partial/\partial x_2 f$ и $\partial/\partial x_2 \partial/\partial x_1 f$ хорошо определены в нуле. Верно ли, что f класса C^2 всюду? Верно ли, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} f?$$

Предположим дополнительно, что $\partial/\partial x_1 \partial/\partial x_2 f$ и $\partial/\partial x_2 \partial/\partial x_2 f$ непрерывны в нуле – верно ли тогда, что f класса C^2? А если еще предположить, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} f?$$

Здесь $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$ – частные производные вдоль базисных векторов $\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle \in \mathbb{R}^2$

Задача 2. Пусть E – векторное расслоение на гладком компактном многообразии M. *Связностью* на E называется такой оператор $\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E \otimes T^*M)$, что

$$\nabla(ae) = a\nabla(e) + e \otimes da$$

для любых $a \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $e \in C^\infty(M, E)$. Докажите, что на любым расслоении существует связность. Указание: докажите сначала, что если ∇_1, ∇_2 – связности, а $\lambda \in \mathbb{R}$ – любое число, то $\lambda\nabla_1 + (1 - \lambda)\nabla_2$ – тоже связность; затем воспользуйтесь разбиением единицы.

Задача 3. (а) Пусть M – гладкое многообразие, а E_1, E_2 – векторные расслоения на нем. Верно ли, что любое отображение $\varphi : C^\infty(M, E_1) \to C^\infty(M, E_2)$, которое совместимо со структурой $C^\infty(M, \mathbb{R})$-модуля, происходит из отображения расслоений $E_1 \to E_2$?

(б) Пусть M – гладкое мнгообразие, а E – расслоение на нем, нсбаженное связностью ∇. Докажите, что ∇ единственным образом продолжается до отображения

$$\nabla : C^\infty(M, \Lambda^\bullet T^*M \otimes E) \to C^\infty(M, \Lambda^{\bullet+1} T^*M \otimes E),$$

для которого

$$\nabla(e \otimes \alpha) = \nabla(e) \wedge \alpha + (-1)^{\mathsf{deg}\,\alpha} e \otimes d\alpha.$$

Более того, докажите, что $\nabla^2 : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M \otimes E)$ происходит из отображения расслоений $R : E \to \Lambda^2 T^*M \otimes E$ (это отображение называется кривизной связности ∇).

Задача 4. Пусть M – гладкое компактное ориентируемое подмногообразие, а $M' \subset M$ – подмногообразие коразмерности 1, заданное как нули гладкой функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, причем $df \neq 0$. Докажите, что M' ориентируемо.

Задача 5. Пусть M – гладкое компактное ориентируемое многообразие размерности 2, на котором существует векторное поле ξ, нигде не обращающееся в ноль. Докажите, что касательное расслоение TM тривиально. Верно ли это, если M размерности 3 (указание: рассмотрите произведение $S^2 \times S^1$ сферы на окружность)?

Задача 6. Докажите, что касательное расслоение TS^2 к двумерной сфере S^2 нетривиально. Разрешается использовать без доказательства следующий факт:

- Пусть $f_1, \dots, f_n : S^1 \to S^1$ – непрерывные отображения из единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$ в себя, причем каждое из них продолжается до непрерывного отображения $D \to S^1$ из единичного диска $D \subset \mathbb{C}$, $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$. Тогда произведение $f_1 f_2 \dots f_n : S^1 \to S^1$ не равно отображению $S^1 \to S^1, z \mapsto z^2$.

Указание: введите сначала на сфере риманову метрику; потом покройте ее двумя картами – северным и южным полушарием – и вычислите функцию перехода.

Задача 7. Для любого конечномерного векторного пространства V и вектора $v \in V$, операция "подстановки v" – это эндоморфизм $\alpha \mapsto \alpha \lrcorner v$ внешней алгебры $\Lambda^\bullet V^*$, заданный так:

$$(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) \lrcorner v = \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i-1} \langle v, e_i \rangle e_1 \wedge \dots e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \dots e_k,$$

где $e_1, \dots, e_k \in V^*$ – любые ковектора, а $\langle v, e_i \rangle \in \mathbb{R}$ – результат применения ковектора $e_i \in V^*$ к вектору $v \in V$.

(а) Докажите, что операция $\alpha \mapsto \alpha \lrcorner v$, $\Lambda^{\bullet+1} V^* \to \Lambda V^*$ удовлетворяет правилу Лейбница: $(\alpha \wedge \beta) \lrcorner v$ есть сумма $(\alpha \lrcorner v) \wedge \beta$ и $\alpha \wedge (\beta \lrcorner v)$ с какими-то знаками. С какими?

(б) Докажите *формулу гомотопии Картана*: для любого векторного поля ξ и любой k-формы α на гладком многообразии M имеем

$$D_\xi(\alpha) = d(\alpha \lrcorner \xi) + (d\alpha \lrcorner \xi),$$

где D_ξ – производная Ли вдоль ξ. Указание: докажите сначала, что обе части удовлетворяют правилу Лейбница и, более того, коммутируют с дифференциалом де Рама; затем проверьте равенство для $k = 0$.

Задача 8. Пусть M – гладкое компактное многообразие размерности k, а $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ – гладкая функция на нем. Напомним, что критическая точка функции f – это такая точка $m \in M$, что $df_m = 0$; критическая точка m невырождена, если гессиан в ней – невырожденная квадратичная форма на $T_m M$.

(а) Докажите, что у f по крайней мере две критические точки.

(б) Пусть у f ровно две критические точки, причем обе невырождены. Докажите, что M диффеоморфно сфере S^k. Указание: пусть m – одна из двух невырожденных критических точке. Докажите сначала, используя лемму Морса, что для любого $c \in \mathbb{R}$, близкого к $f(m)$, подмногообразие $f^{-1}(c) \subset M$ либо пусто, либо диффеоморфно сфере S^{k-1}.