Независимый Московский Университет
Высший Колледж Математики
2005

ζ-ФУНКЦИЯ И ГИПОТЕЗА РИМАНА

М. Балазар

Задачи, первая серия

1. Гаусовы суммы

а) Пусть a, q целые числа, $q > 0$. Сравня с интегралом доказать, что

$$\psi(x; a, q) := \sum_{n \geq 0} e^{-\pi(a+nq)^2 x} \sim \frac{1}{2q\sqrt{x}} \text{ quand } x \to 0.$$

б) Пусть a, q целые числа такие, что pq чётно и $q > 0$. Доказать, что

$$\theta(z + ip/q) = 1 + 2\sum_{a=1}^{q} e^{-i\pi a^2 p/q} \psi(z; a, q).$$

в) Отсюда выводить если p и q целые числа такие, что pq чётно, что

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} e^{-i\pi a^2 p/q} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{p}} \sum_{a=0}^{p-1} e^{i\pi a^2 q/p}.$$

Выражать результат в явном виде когда $p = 2$.

2. Функция $\xi(s)$

Положим

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

а) Доказать, что ξ является целой функции первого порядка, и что $\xi(s) = \xi(1-s)$.

б) Доказать, что

$$\xi(s) = \int_0^{+\infty} H(y) y^{s-1} dy,$$

где $H(y) = 2y^2 \sum_{n \geq 1} (2\pi^2 n^4 y^2 - 3\pi n^2) e^{-\pi n^2 y^2}$.

в) Доказать, что $yH(y) = H(1/y)$, и что $H(y) > 0$, для каждого $y > 0$.

3. Оценка сверху $\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$ для $\sigma > 1$

Пусть $\sigma > 1$. Доказать последовательно, что

а)

$$(\sigma - 1)\zeta(\sigma) = \sigma - \sigma(\sigma - 1) \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{\sigma+1}} dt;$$

б)

$$\zeta(\sigma) + (\sigma - 1)\zeta'(\sigma) > 1 - (2\sigma - 1) \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{\sigma+1}} dt;$$

в)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{t\} - 1/2}{t^{\sigma+1}} dt < 0.$$

Отсюда выводить, что

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1}, \quad \sigma > 1.$$

4. Асимптотическое разложение $\arg(\pi^{-s/2}\Gamma(s/2))$**, где** $\Re s = 1/2$

Положим $\theta(t) = \arg(\pi^{-it/2}\Gamma(1/4 + it/2))$. Доказать, что

$$\theta(t) = \frac{1}{2} t \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(1 - 2^{1-2k})}{4k(2k-1)} t^{1-2k} + r_n(t),$$

где $B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, \ldots$ являются числами Бернулли, и

$$|r_n(t)| < \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n+2} t^{2n+1}} + e^{-\pi t}.$$

5. Прообраз Меллина функции $\zeta(s)/(s - \rho)$

Пусть $\rho \in \mathbb{C}$ и

$$F_\rho(s) := \frac{\zeta(s)}{s - \rho}.$$

Выражать в явном виде все функции $f : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ и максимальные интервалы (a, b) такие, что $f \in \mathcal{W}(a, b)$ и $Mf(s) = F_\rho(s)$, для $a < \Re s < b$.