Независимый Московский Университет
Высший Колледж Математики
2005

ζ-ФУНКЦИЯ И ГИПОТЕЗА РИМАНА

М. Балазар

Задачи, вторая серия

1. Характеризация функции θ

Пусть $(a_n)_{n\geq 1}$ и $(b_n)_{n\geq 1}$ комплексные последовательности с полиномиальным ростом такие, что

$$\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\geq 1} b_n e^{-\pi n^2/x} + P(x),\ x>0,$$

где $P(x)$ – конечная линейная комбинация функций вида $x^\rho(\log x)^k$, $\rho\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$.

Доказать, что $a_n = b_n$ и является постоянной последовательностью, скажем равной некоторому C, и что $P(x) = C(x^{-1/2}-1)/2$.

2. Модифицированное функциональное уравнение.

В формулировке теоремы Хамбургера,заменим функциональное уравнение следующим :

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)f(s) = k^{-s}\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)g(1-s),\ \text{где } k>0.$$

Не изменяя остальных условий теоремы, доказать, что линейное пространство решений f обращается в $\{0\}$ если k не целое, и имеет размерность k, если k целое.

3. Ортогональные многочлены и преобразование Меллина.

Пусть $\omega(t)$ положительная измеримая функция для $t>0$.

а) Предположим, что каждый многочлен от t принадлежит пространству $L^2(]0,+\infty[,\omega(t)^2dt)$. Доказать, что преобразование Меллина $M\omega(s)$ – функция определена, и голоморфная для $\Re s > 1/2$.

б) Предположим, более того, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ мероморфная функция $M\omega(s+n)/M\omega(s)$ является многочленом степени n от s.

Доказать, что $M\omega$ продолжается до мероморфной функции в $\mathbb{C}$, также означемой $M\omega$. Доказать, что $\tau\mapsto\tau^n M\omega(1/2+i\tau)$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$ для каждого $n\in\mathbb{N}$.

в) Обозначим через $(P_n(t))_{n\geq 0}$ последовательность ортогональных многочленов в $L^2(]0,+\infty[,\omega(t)^2dt)$, получаемых из последовательности $(t^n)_{n\geq 0}$ процессом Грама-Шмидта, и M_n преобразование Меллина функции $P_n(t)\omega(t)$.

При условиях **а)** и **б)** доказать, что $M_n = M\omega\cdot Q_n$, где Q_n является многочленом степени n, все корни которого лежат на прямой $\Re s = 1/2$.

г) Проверить, что для $\alpha>-1$, $\omega(t) = t^{\alpha/2}e^{-t/2}$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Выразить в явном виде Q_n, когда $n\leq 3$ и $\alpha = \pm 1/2$ (многочлены Бумпа и Нга). Проверить результат **в)**.