ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Лемма Адамара, лемма Морса, параметрическая лемма Морса.

Начнем с тривиального примера того, как применяется теорема о неявной функции.

Пример 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ поверхность (сферу), заданную уравнением $x^2+y^2+z^2=1$. Пространство представим как произведение $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$, где первый сомножитель порожден двумя первыми векторами базиса (которым соответствуют координаты x и y), а второй сомножитель — третьим вектором (координата z). Уравнение представим как отображение $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, где $f((x,y),z)=x^2+y^2+z^2$. Пусть (x_*,y_*,z_*) — точка сферы, то есть $f((x_*,y_*),z_*)=1$. Чтобы проверить, что отображение f соответствует в точке $((x_*,y_*),z_*)$ условиям теоремы о неявной функции, нужно зафиксировать $(x,y)=(x_*,y_*)$, то есть рассмотреть отображение $f_{(x_*,y_*)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, заданное равенством $f_{(x_*,y_*)}(z)=f((x_*,y_*),z)$ и вычислить его производную в точке $z=z_*$. Эта производная равна $2z_*$. Тем самым если $z_*\neq 0\Leftrightarrow x_*^2+y_*^2\neq 1$ (напомним, что (x_*,y_*,z_*) — точка сферы), условия теоремы выполнены. Это означает, что в некоторой окрестности $U\subset\mathbb{R}^2$ точки (x_*,y_*) существует функция $h:U\to\mathbb{R}$ такая, что $h(x_*,y_*)=z_*$ и $f(x,y,h(x,y))\equiv 1$. Обычно это выражают словами "уравнение $x^2+y^2+z^2=1$ задает в окрестности точки (x_*,y_*) величину z как функцию x и y". Если $z_*=0$, то такой окрестности U (и функции h) не существует, потому что сколь угодно близко к точке (x_*,y_*) (такой что $x_*^2+y_*^2=1$) найдутся точки (x,y), для которых $x^2+y^2>1$, и вовсе не существует z, для которого $x^2+y^2+z^2=1$. Это очевидно, но заметим, что несуществование U и h *не вытекает* из теоремы о неявной функции, а требует дополнительных рассуждений.

(Напомним, что) *диффеоморфизмом* называется обратимое гладкое отображение, обратное к которому также гладкое.

Теорема 1. *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — гладкая функция, причем $f(0)=0$ и начало координат не является критической точкой: $f'(0)\neq 0$. Тогда существует такая окрестность U начала координат и такой диффеоморфизм $D:U\to U$, что $D(0)=0$ и $f(D(x))=\big(f'(0),x\big)$.*

Доказательство. Поскольку $f'(0)\neq 0$, по крайней мере одна из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ отлична от нуля; пусть это $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)$. Будем искать диффеоморфизм D в виде $D(x)=(u(x),x_2,\dots,x_n)$, где $u(0)=0$. Тогда для $u(x)$ получается уравнение $f(u(x),x_2,\dots,x_n)=\big(f'(0),x\big)$. Отображение $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, заданное формулой $\varphi(x,u)=f(u,x_2,\dots,x_n)-\big(f'(0),x\big)$, удовлетворяет в точке $(0,0)$ условиям теоремы о неявной функции: $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\neq 0$ — следовательно, уравнение $\varphi(x,u)=0$ задает u как функцию x в некоторой окрестности V начала координат; при этом $\frac{\partial u}{\partial x_1}(0)=1$ и $\frac{\partial u}{\partial x_k}(0)=0$ при $k\neq 1$. Из последнего равенства вытекает, что $D'(0)=I$. Согласно теореме об обратной функции, D — диффеоморфизм в некоторой (возможно, меньшей, чем V) окрестности U начала координат. □

Символом $\mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n)$ мы будем обозначать векторное пространство симметрических матриц $n\times n$ с действительными матричными элементами.

Лемма 1 (Адамар). *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — гладкая функция, для которой $f(0)=0$ и $f'(0)=0$. Тогда существует гладкое отображение $A:\mathbb{R}^n\to\mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $f(x)=\big(A(x)x,x\big)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$, и $A(0)=\frac{1}{2}f''(0)$.*

Доказательство. $f(x)=\int_0^1\frac{d}{dt}f(tx)\,dt$ (по формуле Ньютона–Лейбница) $=\int_0^1\big(f'(tx),x\big)\,dt$ (по формуле производной композиции) $=\int_0^1\big(\int_0^t\frac{d}{ds}f'(sx)\,ds,x\big)\,dt$ (Ньютона–Лейбница) $=\int_0^1\big(\int_0^t f''(sx)x\,ds,x\big)\,dt$ (производной композиции) $=\big(A(x)x,x\big)$, где $A(x)=\int_0^1\int_0^t f''(sx)\,dsdt$. Очевидно, $A(0)=f''(0)\int_0^1\int_0^t dsdt=\frac{1}{2}f''(0)$. Согласно теореме о смешанных частных производных, $A(x)$ — симметрическая матрица. □

Теорема 2 (лемма Морса). *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — гладкая функция, причем $f(0)=0$, $f'(0)=0$ и оператор $f''(0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ невырожден. Тогда существует такая окрестность U начала координат и такой диффеоморфизм $D:U\to U$, что $f(D(x))=\frac{1}{2}(f''(0)x,x)$.*

Доказательство. Представим f по лемме Адамара: $f(x)=(A(x)x,x)$, и будем искать диффеоморфизм в виде $D(x)=B(x)x$, где $B(x)\in\mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n)$ и $B(0)=I$. Тогда для $B(x)$ получается уравнение $(A(B(x)x)B(x)x,B(x)x)=(A(0)x,x)$, что равносильно $B(x)A(B(x)x)B(x)=A(0)$. Рассмотрим отображение $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n)$, заданное равенством $\varphi(x,B)=BA(Bx)B-A(0)$. Тогда $\varphi_0(B)\stackrel{\text{def}}{=}\varphi(0,B)=BA(0)B$, откуда $\varphi_0'(I)$

— оператор $\mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n)$, действующий по правилу $\varphi_0'(I)X = XA(0) + A(0)X$. Симметрический оператор $A(0)$ диагонализуем: $A(0) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ в некотором базисе в $\mathbb{R}^n$. Если в этом базисе матрица оператора X есть (x_{ij}), то $XA(0) + A(0)X = ((\lambda_i + \lambda_j)x_{ij})$. Отсюда вытекает, что если $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ при всех $i, j = 1, \dots, n$, то оператор $\varphi_0'(I)$ обратим и отображение φ удовлетворяет в точке $(0, I)$ условиям теоремы о неявной функции. Таким образом, в этом случае лемма Морса доказана.

Если равенство $\lambda_i + \lambda_j = 0$ имеет место — иными словами, среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ есть пара взаимно противоположных ($i = j$ невозможно, т.к. оператор $A(0) = f''(0)$ невырожден, то есть среди λ_i нет нулей) — то поиск диффеоморфизма D можно провести в два этапа. Вначале рассмотрим функцию $g(x) = f(S(x))$, где $S(x) = (s_1x_1, \dots, s_nx_n)$, $s_1, \dots, s_n$ — ненулевые константы, а координаты $x_1, \dots, x_n$ выбраны так, что $A(0) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда $g''(0) = \mathrm{diag}(s_1^2\lambda_1, \dots, s_n^2\lambda_n)$, и можно подобрать $s_1, \dots, s_n$ так, чтобы среди чисел $s_i^2\lambda_i$ не было противоположных. Для функции $g(x)$ лемма Морса уже доказана. □

Пусть теперь $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, но матрица $f''(0)$ вырождена. Пусть $V = \mathrm{Ker}\, f''(0) \subset \mathbb{R}^n$, и $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор ортогонального проектирования на V. Тогда $Q \stackrel{\mathrm{def}}{=} I - P$ — оператор ортогонального проектирования на ортогональное дополнение $V^\perp$ к V; оператор $Qf''(0) : V^\perp \to V^\perp$ невырожден.

Теорема 3 (параметрическая лемма Морса). *Существует такая окрестность U начала координат, такой диффеоморфизм $D : U \to U$ и такая гладкая функция $\psi : V \to \mathbb{R}$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$ и $f(D(x)) = \varphi(Px) + \frac{1}{2}(f''(0)Qx, Qx)$.*

Доказательство. Построение диффеоморфизма D произведем в три этапа. Вначале рассмотрим оператор $\psi_1 : V \oplus V^\perp \to V^\perp$, заданный равенством $\psi_1(v, w) = Qf'(v+w)$. Он удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции в точке $(0, 0)$: $(\psi_1)_0(w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi_1(0, w) = Qf'(w)$, откуда $(\psi_1)_0'(0) = Qf''(0) = QG$ — невырожденный оператор. Следовательно, уравнение $\psi_1(v, w) = 0$ определяет отображение $h : V \to V^\perp$ такое, что $Qf'(v + h(v)) = 0$, причем $h(0) = 0$. Положим по определению $D_1(x) = x + h(Px)$; тогда $D_1^{-1}(x) = x - h(Px)$, откуда вытекает, что D_1 — диффеоморфизм. Положим $f_1(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(D_1(x)) = f(x + h(Px)) = f(Px + Qx + h(Px))$. Функция f_1 обладает свойством $f'(x) \in V$ при $x \in V$.

Зафиксируем теперь $v \in V$ и рассмотрим функцию $\varphi_v(w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_1(v+h(v)+w) - f_1(v+h(v))$ на пространстве $V^\perp$. Она удовлетворяет условиям теоремы 2. Действительно, $\varphi_v(0) = 0$, $\varphi_v'(0) = Qf'(v + h(v)) = 0$ в силу выбора $h(v)$, и $\varphi_v''(0) = Qf''(v + h(v))$. Тогда $\varphi_v''(0)$ зависит от v непрерывно и $\varphi_0''(0) = Qf''(0) : V^\perp \to V^\perp$ — невырожденный оператор. Следовательно, $\det \varphi_v''(0) \neq 0$ при достаточно малых v, то есть при таких v матрица $\varphi_v''(0)$ обратима. Следовательно, при каждом v из некоторой окрестности начала координат в V существует такая окрестность $U_v \subset V^\perp$ и такой диффеоморфизм $D_v : U_v \to U_v$, что $\varphi_v(D_v(w)) = \varphi_v(0) + \frac{1}{2}(\varphi_v''(0)w, w)$. Положим теперь $D_2(x) = Px + D_{Px}(Qx)$. Производная $D_2'(0)$ — единичный оператор (почему ?) — следовательно, по теореме о неявной функции D_2 — диффеоморфизм. Имеем $f_2(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_1(D_2(x)) = f((D_1 \circ D_2)(x)) = f_1(Px + h(Px)) + \frac{1}{2}(\varphi_{Px}''(0)Qx, Qx) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi(Px) + \frac{1}{2}(\varphi_{Px}''(0)Qx, Qx)$.

Будем теперь искать диффеоморфизм вида $D_3(x) = Px + Y(Px)Qx$, окончательно приводящий функцию к стандартному виду: $f_2(D_3(x)) = \varphi(Px) + \frac{1}{2}(f''(0)Qx, Qx)$; здесь $Y(v)$ — симметрический оператор (для каждого $v \in V$) и $Y(0) = I$. Иными словами, $f_2(D_3(x)) = \psi(Px) + \frac{1}{2}(Y(Px)\varphi_{Px}''(0)Y(Px)Qx, Qx) = \varphi(Px) + \frac{1}{2}(\varphi_0''(0)Qx, Qx)$, то есть $Y(v)\varphi_v''(0)Y(v) = \varphi_0''(0)$ для каждого $v \in V$. Нетрудно проверить, что отображение $\psi_3 : V \oplus \mathrm{Symm}(\mathbb{R}^n)$, заданное формулой $\psi_3(v, Y) = Y\varphi_v''(0)Y$, удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции. Следовательно, существует требуемое отображение $Y(v)$, и диффеоморфизм $D = D_3 \circ D_2 \circ D_1$ построен. □

Рассмотрим алгебру $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ гладких функций на $\mathbb{R}^n$ и в ней максимальный идеал $I_0 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f(0) = 0\}$. Напомним, что квадратом идеала (произвольного) I называется идеал I^2, состоящий из всех конечных сумм вида $\sum_i a_ib_i$, где $a_i, b_i \in I$ для всех i; очевидно, $I^2 \subset I$.

Теорема 4. *$f \in I_0^2$ тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $f \in I_0^2$, т.е. $f = \sum_i a_ib_i$. Тогда $f(0) = 0$ и $f'(0) = \sum_i a_i'(0)b_i(0) + a_i(0)b_i'(0) = 0$.

Обратно, пусть $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$. Тогда по лемме Адамара $f(x) = (A(x)x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)x_ix_j = \sum_{i=1}^n u_i(x)x_i$, где $u_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)x_j$. Очевидно, $x_i \in I_0$ и $u_i \in I_0$, откуда $f \in I_0^2$. □

Следствие. *$I_0/I_0^2 = \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Определим линейное отображение $\mu : I_0 \to \mathbb{R}^n$ равенством $\mu(f) = f'(0)$. По теореме 4 имеем $\mathrm{Ker}\, \mu = I_0^2$; очевидно, $\mathrm{Im}\, \mu = \mathbb{R}^n$ (всякий вектор может быть $f'(0)$). Но образ изоморфен фактору области определения по ядру. □

Таким образом по структуре алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно выяснить, чему равно n.