ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Группа характеров. Преобразование Фурье.

Пусть G — абелева топологическая группа, т.е. коммутативная группа, являющаяся топологическим пространством и такая, что операции умножения и взятия обратного в ней непрерывны. Отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ называется гомоморфизмом топологических групп, если оно является гомоморфизмом групп и непрерывно.

Пример 1. Абелевыми топологическими группами являются $\mathbb{R}^n$ относительно сложения, $\mathbb{Z}^n$ относительно сложения (с дискретной топологией), а также группа $U(1)^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ с операцией покомпонентного умножения и топологией (тора $\mathbb{T}^n$), унаследованной из $\mathbb{C}^n$.

В дальнейшем мы будем работать в основном с группами $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $U(1)$. Для подмножества $X \subset G$, где $G = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ или $U(1)$ определим его меру Хаара $\mu(X) \in [0, +\infty]$ так: если $G = \mathbb{R}$, то $\mu(X)$ это мера Лебега X, если $G = \mathbb{Z}$, то $\mu(X)$ это число элементов в X, а если $G = U(1)$, то $\mu(X)$ это мера Лебега множества $\Phi(X) \subset [0,1)$, где $\Phi(e^{2\pi i\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$, $0 \le \varphi < 1$. Соответственно определяется интеграл Лебега $\int_G f(x)\,dx$ от функции $f : G \to \mathbb{C}$: для $G = \mathbb{R}$ это интеграл Лебега $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, для $G = \mathbb{Z}$ это $\sum_{n\in X} f(n)$, а для $G = U(1)$ это $\int_0^1 f(e^{2\pi i\varphi})\,d\varphi$.

Сверткой двух функций $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ называется функция $(f_1 * f_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G f_1(t) f_2(xt^{-1})\,dt$ (если операцию в группе обозначать умножением; если сложением, то $f_2(x-t)$).

Предложение 1. *Если функции $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ суммируемы по Лебегу (где $G = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ или $U(1)$, а мера определена выше), то свертка $f_1 * f_2$ определена почти всюду и тоже суммируема по Лебегу. Имеет место неравенство $\int_G |(f_1 * f_2)(x)|\,dx \le \int_G |f_1(x)|\,dx \int_G |f_2(x)|\,dx$.*

Доказательство. По теореме Фубини (проверьте, что она верна для $\mathbb{Z}$ и $U(1)$!) из суммируемости функций f_1, f_2 следует, что функция $g : G \times G \to \mathbb{C}$, заданная равенством $g(t,x) = f_1(t) f_2(x)$, также суммируема. Преобразование $(t,x) \mapsto (t, x-t)$ — диффеоморфизм $G \times G$ в себя, сохраняющий меру. По теореме о замене переменной (проверьте, что она тоже верна для $\mathbb{Z}$ и $U(1)$), функция $\tilde{g}(t,x) = g(t, x-t)$ также суммируема. Из теоремы Фубини следует, что $(f_1 * f_2)(x) = \int_G \tilde{g}(t,x)\,dt$ определена почти всюду и суммируема.

Имеем $\int_G |(f_1 * f_2)(x)|\,dx = \int_G \left|\int_G f_1(t) f_2(x-t)\,dt\right|\,dx \le \int_{G\times G} |f_1(t) f_2(x-t)|\,dxdt = \int_G |f_1(t)| \int_G |f_2(x-t)|\,dxdt = \int_G |f_1(t)|\,dt \int_G |f_2(y)|\,dy$ (замена переменной $y = x - t$). □

Предложение 2. *Свертка является ассоциативной коммутативной билинейной операцией на множестве суммируемых функций $G \to \mathbb{C}$. Свертка перестановочна с операцией сдвига на группе.*

Доказательство. Линейность свертки следует из линейности интеграла Лебега. Коммутативность: $(f_2 * f_1)(x) = \int_G f_1(x-t) f_2(t)\,dt =$ (замена переменных $t \mapsto x-t$; формула замены переменной в интеграле работает для $G = \mathbb{Z}$ и $G = U(1)$!) $= \int_G f_1(t) f_2(x-t)\,dt = (f_1 * f_2)(x)$. Ассоциативность: $((f_1 * f_2) * f_3(x) = \int_G (f_1 * f_2)(t) f_3(x-t)\,dt = \int_{G\times G} f_1(\tau) f_2(t-\tau) f_3(x-t)\,d\tau dt$ (по теореме Фубини) $= \int_{G\times G} f_1(\tau) f_2(s) f_3(x-\tau-s)\,d\tau ds$ (замена переменной $s = t - \tau$) $= \int_G f_1(\tau)(f_2 * f_3)(x-\tau)\,d\tau$ (опять теорема Фубини) $= (f_1 * (f_2 * f_3))(x)$.

Пусть $T[a]$ — оператор сдвига аргумента функции на элемент $a \in G$: $(T[a]f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+a)$ Имеем $T[a](f_1 * f_2)(x) = (f_1 * f_2)(x+a) = \int_G f_1(t) f_2(x+a-t)\,dt = \int_G f_1(t+a) f_2(x-t)\,dt$ (замена переменной $t \mapsto t+a$) $= ((T[a]f_1) * f_2)(x)$. □

Функция $\varphi : G \to \mathbb{C}$ называется финитной, если она равна нулю вне некоторого компакта.

Предложение 3. *Если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ гладкая и финитная, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ суммируема, то $\varphi * f$ существует и является гладкой. Свертка в этом случае перестановочна с дифференцированием: $(\varphi * f)' = \varphi' * f$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ отлична от нуля лишь на отрезке $[-a, a]$. Тогда φ ограничена (поскольку непрерывна). Следовательно, $|\varphi(t) f(x-t)| \le const. |f(x-t)|$, и интеграл $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(x-t)\,dt$ сходится. В силу предложения 2 имеем $(\varphi * f)(x) = (f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(x-t)\,dt$, и аналогичная формула имеет место для φ'. Имеем $(\varphi' * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \lim_{y\to x} \frac{\varphi(y-t)-\varphi(x-t)}{y-x}\,dt$. По теореме Лагранжа о промежуточном значении имеем $\frac{\varphi(y-t)-\varphi(x-t)}{y-x} = \varphi'(\xi(x,y))$, где $\xi(x,y) \in [x,y]$. Функция φ' непрерывна и отлична от нуля лишь на компакте, откуда вытекает, что она равномерно непрерывна. Следовательно, сходимость $\frac{\varphi(y-t)-\varphi(x-t)}{y-x} \to \varphi'(x)$ при

$y \to x$ равномерна по $t \in \mathbb{R}$, и мы можем переставить местами пределы: $(\varphi' * f)(x) = \lim_{y\to x} \frac{1}{y-x} \int_{\mathbb{R}} f(t)(\varphi(y-t) - \varphi(x-t))\, dt = (\varphi * f)'(x)$. Повторяя это вычисления, получим, что $\varphi * f$ бесконечно гладкая. □

Гомоморфизм топологических групп $\chi : G \to U(1)$ (то есть непрерывное отображение $\chi : G \to U(1)$ такое, что $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$, $\chi(e) = 1$ и $\chi(g^{-1}) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$) называется (унитарным) характером топологической группы G. Характеры образуют топологическую группу: операция умножения — поточечная: $(\chi_1\chi_2)(g) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_1(g)\chi_2(g)$, а сходимость — равномерная на всех компактных подмножествах $K \subset G$. Эта группа обозначается $\widehat{G}$ и называется двойственной к G по Понтрягину.

Предложение 4. *$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ определим характер $\chi_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi i \lambda x}$. Очевидно, соответствие $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ это непрерывный гомоморфизм $\mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$. Обратно, пусть $\chi \in \widehat{\mathbb{R}}$, то есть $\chi : \mathbb{R} \to U(1)$ — непрерывная функция, для которой $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ и (следовательно) $\chi(0) = 1$. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая финитная функция. Тогда $(\varphi * \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\chi(x-t)\, dt = \chi(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\overline{\chi(t)}\, dt = const.\chi(x)$ (интеграл, очевидно, сходится). Из предложения 3 вытекает, что функция χ — гладкая. Продифференцируем равенство $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ по y и положим $y = 0$ — получится $\chi'(x) = c\chi(x)$, где $c = \chi'(0)$. Из теоремы единственности решения дифференциального уравнения вытекает, что $\chi(x) = e^{cx}$. Поскольку $\chi(x) \in U(1)$, число c должно быть чисто мнимым: $c = 2\pi i \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отображение $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ является, очевидно, гомоморфизмом групп $\mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$; выше доказано, что это эпиморфизм и, следовательно, изоморфизм (ясно, что $\chi_\lambda = 1$ только при $\lambda = 0$). Это отображение непрерывно. Действительно, если $\lambda_n \to \lambda$ и $x \in [-a, a]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ имеется такое N, что $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon/a$ при $n > N$. Отсюда имеем $|\chi_{\lambda_n}(x) - \chi_\lambda(x)| = |e^{2\pi i(\lambda_n - \lambda)x} - 1| \le |e^{2\pi i \varepsilon} - 1| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $\chi_{\lambda_n}(x) \rightrightarrows \chi_\lambda(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [-a, a]$ и, следовательно, равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}$. Нетрудно доказать и обратное (проделайте !): если $\chi_{\lambda_n}(x) \rightrightarrows \chi_\lambda(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по x на любом компакте $K \subset \mathbb{R}$ (что и означает сходимость $\chi_{\lambda_n} \to \chi_\lambda$ в группе $\widehat{\mathbb{R}}$), то $\lambda_n \to \lambda$. Следовательно, построенное отображение $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ — изоморфизм топологических групп. □

Предложение 5. *$\widehat{U(1)} = \mathbb{Z}$ и $\widehat{\mathbb{Z}} = U(1)$.*

Доказательство. Для всякого $a \in U(1)$ существует характер $\chi_a : \mathbb{Z} \to U(1)$, действующий по формуле $\chi_a(n) = a^n$. Очевидно, соответствие $a \mapsto \chi_a$ — мономорфизм топологических групп $U(1) \to \widehat{\mathbb{Z}}$. С другой стороны, пусть $\chi : \mathbb{Z} \to U(1)$ — характер. Тогда $\chi(n) = a^n$, где $a \stackrel{\text{def}}{=} \chi(1)$. Следовательно, указанное соответствие — изоморфизм групп.

Для всякого $n \in \mathbb{Z}$ определим характер $\chi_n : U(1) \to U(1)$ равенством $\chi_n(z) = z^n$ — таким образом определен мономорфизм групп $\mathbb{Z} \to \widehat{U(1)}$. Пусть теперь $\chi : U(1) \to U(1)$ — характер. Определим характер $\tilde{\chi} : \mathbb{R} \to U(1)$ равенством $\tilde{\chi}(x) = \chi(e^{2\pi i x})$. Согласно предложению 4, имеем $\tilde{\chi}(x) = e^{2\pi i n x}$ для некоторого $n \in \mathbb{R}$. Поскольку должно выполняться равенство $\tilde{\chi}(1) = \tilde{\chi}(0) = 1$, получаем $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, имеется изоморфизм групп $\mathbb{Z} \to \widehat{U(1)}$, действующий по формуле $n \mapsto \chi_n$.

Проверка гомеоморфности обоих построенных изоморфизмов — упражнение. □

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — суммируемая по Лебегу функция, где $G = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ или $U(1)$. Преобразование Фурье от f это функция $F(f) : \widehat{G} \to \mathbb{C}$, заданная равенством $F(f)(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, dx$ (интеграл сходится, т.к. $|\chi(x)| = 1$).

Пример 2. Для $G = \mathbb{R}$ преобразование Фурье это функция $F(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, заданная формулой $F(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \lambda x}\, dx$. Например, при $a > 0$ имеем $F(\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi x^2/a^2})(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{a^2}(x^2 + 2ia^2\lambda x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{a^2}((x + \pi i a^2 \lambda)^2 + a^4\lambda^2)}\, dx =$ $\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi a^2 \lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{a^2} y^2\, dy}$ (замена переменной $y = x + \pi i \sigma \lambda$) $= \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\pi a^2 \lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz$ (замена переменной $z = y\sqrt{\pi}/a$) $= \sqrt{a} e^{-\pi a^2 \lambda^2}$ (напомним, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi}$).

Пример 3. Если $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — суммируемая по Лебегу функция, т.е. такая двусторонняя последовательность $c(n) \stackrel{\text{def}}{=} c_n$, что ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ сходится, то $F(c) : U(1) \to \mathbb{C}$ — функция, заданная равенством $F(c)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{-n}$. Иногда функцию $F(c)(e^{2\pi i \varphi}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi i n \varphi}$ называют рядом Фурье (на отрезке $[0, 1]$) последовательности c_n.

Пример 4. Пусть $f : U(1) \to \mathbb{C}$ — суммируемая функция, т.е. $f(e^{2\pi i t}) = g(t)$, где $t \in [0, 1]$, и интеграл Лебега $\int_0^1 g(t)\, dt$ сходится. Тогда $F(f)$ — функция $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, т.е. двусторонняя последовательность $c_n(g) = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i n t}\, dt$. Например, если $g(t) = g_k(t) = e^{2\pi i k t}$, то $c_n(g_k) = \int_0^1 e^{2\pi i (k-n)t}\, dt = 0$ при $n \neq k$ и $c_k(g_k) = 1$.