ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Обратное преобразование Фурье.

Теорема 1. *Если $f : G \to \mathbb{C}$ — суммируемая функция, то $F(f) : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ существует, непрерывна и ограничена. Имеют место равенства $F(f_1 * f_2) = F(f_1)F(f_2)$, $F(T[a]f)(\chi) = \chi(a)F(f)(\chi)$ (где $a \in G$, $T[a]$ — оператор сдвига на a) и $F(\psi f) = T[\overline{\psi}]F(f)$ (где $\psi : G \to \mathbb{C}$ — характер, а $T[\overline{\psi}]$ — оператор сдвига на характер $\overline{\psi}$).*

Доказательство. Существование и ограниченность $F(f)$ очевидны. Если f суммируема, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset G$, что $\int_{G\setminus K} |f(t)|\, dx < \varepsilon$. Пусть $\chi_n \to \chi$ в группе $\widehat{G}$. Тогда $|\chi_n(t) - \chi(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in K$ и достаточно больших n (сходимость — равномерная на компактных подмножествах $K \subset G$). Отсюда $|F(f)(\chi_n) - F(f)(\chi)| \le \int_G |f(t)|\, |\chi_n(t) - \chi(t)|\, dx = \int_K + \int_{G\setminus K} \le \varepsilon \int_G |f(t)|\, dt + 2\varepsilon$, откуда вытекает, что функция $F(f) : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ непрерывна.

Имеем $F(f_1 * f_2)(\chi) = \int_G \int_G f_1(t) f_2(x-t)\overline{\chi(x)}\, dxdt = \int_G \int_G f_1(t) f_2(x-t)\overline{\chi(t)\chi(x-t)}\, dxdt = \int_G f_1(t)\overline{\chi(t)}\, dt \times \int_G f_2(y)\overline{\chi(y)}\, dy = F(f_1)(\chi)F(f_2)(\chi)$. Также: $F(T[a]f)(\chi) = \int_G f(x+a)\overline{\chi(x)}\, dx = \int_G f(y)\overline{\chi(y)\chi(-a)}\, dy = \chi(a)F(f)$. И еще: $F(\psi f)(\chi) = \int_G \psi(x) f(x)\overline{\chi(x)}\, dx = \int_G f(x)\overline{(\chi\psi^{-1})(x)}\, dx = F(f)(\chi\psi^{-1}) = T[\psi^{-1}]F(f)(\chi) = (T[\overline{\psi}]F(f))(\chi)$. □

Более частные случаи коммутирования преобразования Фурье с разными операторами на пространстве функций:

Предложение 1. *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — гладкая функция, f' суммируема и $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то $F(f') = 2\pi i\lambda F(f)$. Если $f : U(1) \to \mathbb{C}$ — гладкая функция, то $c_n(f') = 2\pi i n c_n(f)$. Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — функция, для которой $g(x) = 2\pi i x f(x)$ суммируема, то $F(g) = -\frac{d}{d\lambda}F(f)$.*

Доказательство. $F(f')(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-2\pi i\lambda x}\, dx$. Поскольку $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$, интегрирование по частям дает $F(f')(\lambda) = 2\pi i\lambda \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}\, dx = 2\pi i\lambda F(f)(\lambda)$. Второе равенство доказывается аналогично.

Для доказательства третьего равенства заметим, что в силу теоремы Лагранжа о промежуточном значении сходимость $\frac{e^{2\pi i\mu x} - e^{2\pi i\lambda x}}{\mu - \lambda} \to 2\pi i x e^{2\pi i\lambda x}$ при $\mu \to \lambda$ равномерна по x на любом компакте $K \subset \mathbb{R}$. Следовательно, $\frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(x)e^{-2\pi i\lambda x}\, dx = \int_a^b f(x)\frac{d}{d\lambda}e^{-2\pi i\lambda x}\, dx$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Переходя к пределу при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, получаем $\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} 2\pi i x f(x)e^{-2\pi i\lambda x}\, dx$, что и требовалось. □

Обозначая D оператор дифференцирования, а M — оператор умножения на $2\pi i x$, можно выразить предложение 1 для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в виде коммутационных соотношений $FD = MF$ и $FM = -DF$. Первое из этих соотношений верно также и для функций $U(1) \to \mathbb{C}$, если M понимать как оператор, переводящий последовательность a_n в последовательность $2\pi i n a_n$.

Предложение 2. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ имеет суммируемые производные до порядка k включительно, то $F(f)(\lambda) = O(|\lambda|^{-k})$ при $\lambda \to \infty$. Если $f(x) = O(|x|^{-k-2})$ при $x \to \infty$, то $F(f)$ имеет ограниченные производные до порядка k включительно. Если при этом f дважды дифференцируема и $f' = O(|x|^{-k-2})$ и $f'' = O(|x|^{-k-2})$ при $x \to \infty$, то производные функции $F(f)$ до порядка k суммируемы.*

Доказательство. Из предложения 1 вытекает, что $M^k F(f) = (-1)^k F(D^k f)$, при условии суммируемости функций $f, Df, D^2 f, \dots, D^k f$. В силу теоремы 1 функция $F(D^k f)$ ограничена, откуда вытекает, что $|F(f)(\lambda)| \le const. |\lambda|^{-k}$.

Если $f(x) = O(|x|^{-k-2})$ при $x \to \infty$, то функция $M^k f$ есть $O(1/x^2)$ при $x \to \infty$ и, следовательно, суммируема. Из предложения 1 вытекает в этом случае равенство $D^k F(f) = (-1)^k F(M^k f)$, откуда по теореме 1 функция $D^k F(f)$ существует и ограничена. В то же время для всякого $p \le k$ имеем $\int_{\mathbb{R}} |D^p F(f)(\lambda)|\, d\lambda \le \max_{\lambda\in\mathbb{R}}\left((1+\lambda^2)\, |D^p F(f)(\lambda)|\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \pi F((-1)^p(M^p f + \frac{1}{4\pi^2}\frac{d^2}{dx^2}M^p f)) < \infty$ согласно теореме 1, поскольку по условию функция $M^p f$ суммируема, а функция $\frac{d^2}{dx^2}M^p f$ есть линейная комбинация функций $M^q f$, $M^q f'$ и $M^q f''$ с $q \le p$ — все они по условию суммируемы. Следовательно, производная $D^p F(f)$ суммируема. □

Следствие 1. *Если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $f(x) = o(x^{-k})$ при $x \to \infty$ и любом $k \in \mathbb{N}$, то преобразование Фурье $F(f)$ обладает теми же свойствами.*

Пространство функций, описанных в следствии 1, обозначим $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Предложение 3. *Если функция $f : U(1) \to \mathbb{C}$ имеет суммируемые производные до порядка k включительно, то $c_n = O(n^{-k})$ при $n \to \infty$, где $\{c_n\} = F(f)$. Если $a_n = O(n^{-k-2})$ при $n \to \infty$ $(k \geq 2)$, то $F(\{a_n\}) = \sum_n a_n z^n : U(1) \to \mathbb{C}$ — функция, имеющая k суммируемых производных.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается так же, как предложение 2. Пусть теперь $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} F(\{a_n\}) = \sum_n a_{-n} z^n$ и $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_n n a_{-n} z^{n-1}$ (ряд по условию сходится). Имеем $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| \leq \sum_n |a_{-n}| \left|\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1}\right| = \sum_n n\,|a_{-n}|\,|\xi_n^{n-1} - z_0^{n-1}|$ по теореме Лагранжа о промежуточном значении; здесь $\xi_n \in [z_0, z]$. Поскольку $|\xi_n^{n-1} - z_0^{n-1}| \leq n\,|z - z_0|$, получаем, что правая часть стремится к нулю при $z \to z_0$; отсюда $g(z) = f'(z)$. Индукция по k завершает доказательство второго утверждения. $\square$

Пространство последовательностей $\{a_n\}$ таких, что $a_n = o(n^{-k})$ при $n \to \pm\infty$ и любом $k \in \mathbb{N}$, обозначим $\Omega(\mathbb{Z})$.

Следствие 2. *Преобразование Фурье переводит пространства $C^\infty(U(1))$ и $\Omega(\mathbb{Z})$ друг в друга.*

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — функция на абелевой топологической группе. Функция $\tilde{F}(f)(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} F(f)(\overline{\chi})$ на группе $\widehat{G}$ называется обратным преобразованием Фурье от f. Как нетрудно видеть, предложения 2 и 3 и их следствия остаются верными и для обратного преобразования Фурье. Первые два утверждения теоремы 1 также остается верными, а в последних нужно сделать очевидные изменения: $\tilde{F}(T[a]f)(\chi) = \overline{\chi(a)}\tilde{F}(f)(\chi)$ и $\tilde{F}(\psi f) = T[\psi]\tilde{F}(f)$. Вместо предложения 1 получаются коммутационные соотношения $\tilde{F}M = D\tilde{F}$ и $\tilde{F}D = -M\tilde{F}$ (проверьте !), второе из которых верно и для функций $U(1) \to \mathbb{C}$ (при этом на функции накладываются те же условия).

Теорема 2. *Прямое и обратное преобразование Фурье представляют собой взаимно обратные операторы $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}(\mathbb{R})$, а также $C^\infty(U(1)) \longleftrightarrow \Omega(\mathbb{Z})$.*

Доказательство для пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Согласно предложению 1 и его аналогу для обратного преобразования Фурье, оператор $F \circ \tilde{F}$ коммутирует с оператором $M_x : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}(\mathbb{R})$ умножения на x. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $f_1(a) = f_2(a)$, где $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Тогда $f_1(x) - f_2(x) = (x-a)g(x)$ для некоторой функции $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Тогда $F(\tilde{F}(f_1)) - F(\tilde{F}(f_2)) = (x-a)F(\tilde{F}(g))$, откуда вытекает, что значения функций $F(\tilde{F}(f_1))$ и $F(\tilde{F}(f_2))$ в точке a совпадают. Следовательно, значение $F(\tilde{F}(f))(a)$ зависит только от $f(a)$. В силу линейности найдется такая функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, что $F(\tilde{F}(f))(a) = \varphi(a)f(a)$. Иными словами, $F \circ \tilde{F} = M_\varphi$.

В силу того же предложения 1 оператор $F \circ \tilde{F} = M_\varphi$ коммутирует с оператором дифференцирования $D : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Поскольку $DM_\varphi - M_\varphi D = M_{\varphi'}$, имеем $\varphi' \equiv 0$, то есть $F \circ \tilde{F}$ это оператор умножения на константу. Применяя его к функции $f(x) = e^{-x^2/2}$, убеждаемся (см. пример 2 лекции 10), что эта константа равна 1. Для оператора $\tilde{F} \circ F$ рассуждение такое же. $\square$

Доказательство для пространства $C^\infty(U(1))$. Согласно предложению 1 и его аналогу для обратного преобразования Фурье, оператор $F \circ \tilde{F}$ коммутирует с оператором дифференцирования $D : C^\infty(U(1)) \to C^\infty(U(1))$, а также с оператором M умножения на $e^{2\pi i x}$. Остальные рассуждения как в случае $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. $\square$

Доказательство для пространства $\Omega(\mathbb{Z})$. Результат вытекает из теоремы для $C^\infty(U(1))$ и следствия 2. $\square$

Следствие 3. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $C^\infty(U(1))$ или $\Omega(\mathbb{Z})$. Тогда $F(f_1 f_2) = F(f_1) * F(f_2)$.*

Доказательство. Пусть $f_1 = \tilde{F}(g_1)$, $f_2 = \tilde{F}(g_2)$, тогда $f_1 f_2 = \tilde{F}(g_1 * g_2)$ (аналог теоремы 1 для обратного преобразования Фурье) и, следовательно, $F(f_1 f_2) = g_1 * g_2 = F(f_1) * F(f_2)$. $\square$

Введем на пространствах $\mathcal{E}(\mathbb{R}), C^\infty(U(1))$ и $\Omega(\mathbb{Z})$ норму L_2 формулой $\|f\|^2 = (f, f)$, где $(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Иными словами, $\|f\|^2 = \int |f(x)|^2\,dx$. Нетрудно видеть, что (f, g) — эрмитова билинейная форма, то есть скалярное произведение.

Предложение 4. *Преобразование Фурье на пространствах $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\Omega(\mathbb{Z})$ и $C^\infty(U(1))$ сохраняет норму L_2: $\|f\| = \|F(f)\|$.*

Доказательство предложения 4. Согласно следствию 3, $F(|f|^2) = F(f\overline{f}) = F(f) * F(\overline{f})$. По определению, $\|f\|^2 = F(|f|^2)(0)$. С другой стороны, $F(\overline{f})(\lambda) = \overline{F(-\lambda)}$, откуда $(F(f) * F(\overline{f}))(0) = \int_G F(f)(\lambda)\overline{F(f)(\lambda)}\,d\lambda = \|F(f)\|^2$. $\square$