ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Ряд Фурье кусочно-непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса.

Под функцией на $U(1)$ мы будем понимать периодическую функцию на $\mathbb{R}$, "проглатывая" отображение $t \mapsto e^{2\pi it}$

Лемма 1 (Риман). *Пусть функция $f : U(1) \to \mathbb{C}$ суммируема. Тогда $c_n(f) \to 0$ при $n \to \pm\infty$, где $\{c_n(f)\} = F(f)$ (последовательность коэффициентов Фурье).*

Доказательство. Если f является характеристической функцией отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$, то $|c_n(f)| = \left|\int_a^b e^{-2\pi int}\, dt\right| = \frac{1}{2\pi n}\left|e^{-2\pi inb} - e^{-2\pi ina}\right| \le \frac{1}{\pi n} \to 0$.

Пусть теперь f — суммируемая простая функция. Нетрудно показать (проделайте !), что в этом случае f почти всюду равна сумме ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\chi_{[a_k,b_k]}$, где $\sum_k |u_k|(b_k - a_k) < \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим N такое, что $\sum_{k>N} |u_k|(b_k - a_k) < \varepsilon$. Тогда $\int_0^1 |f(t) - f_N(t)|\, dt < \varepsilon$, где $f_N = \sum_{k=1}^{N} u_k\chi_{[a_k,b_k]}$. Отсюда вытекает, что $|c_n(f) - c_n(f_N)| < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. В силу линейности преобразования Фурье $c_n(f_N) = \sum_{k=1}^{N} u_k c_n(\chi_{[a_k,b_k]}) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда $\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n(f)| < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольная, лемма Римана доказана для простых функций.

Пусть теперь $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ суммируема. Тогда существует последовательность f_k простых суммируемых функций такая, что $\int_0^1 |f(t) - f_k(t)|\, dt \to 0$ при $k \to \infty$. Рассмотрим k такое, что $\int_0^1 |f(t) - f_k(t)|\, dt < \varepsilon$, откуда $|c_n(f) - c_n(f_k)| < \varepsilon$ при всех n. Следовательно, $\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n(f)| < \varepsilon$, и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, лемма Римана доказана. □

Пусть теперь $c_n = c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\, dt$ — преобразование Фурье суммируемой функции $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$, а $\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ — обратное преобразование Фурье последовательности $c_n(f)$ (называемое также рядом Фурье функции f). Обозначим $\varphi_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx}$.

Предложение 1. *$\varphi_N = f * D_N$, где $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx} = \frac{\sin \pi(2N+1)x}{\sin \pi x}$ (ядро Дирихле).*

Доказательство. Из формулы суммирования геометрической прогрессии получаем $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx} = \frac{e^{-2\pi iNx} - e^{2\pi i(N+1)x}}{1 - e^{2\pi ix}} = \frac{e^{-2\pi i(N+1/2)x} - e^{2\pi i(N+1/2)x}}{e^{-\pi ix} - e^{\pi ix}} = \frac{\sin \pi(2N+1)x}{\sin \pi x}$. Теперь: $\varphi_N(x) = \int_0^1 f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi in(x-t)}\, dt = \int_0^1 f(t)D_N(x - t)\, dt = (f * D_N)(x)$. □

Пусть x — точка непрерывности или точка разрыва первого рода функции f, т.е. существуют пределы $f(x \pm 0) = \lim_{t\to\pm 0} f(x + t)$. Обозначим $R_f(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x + t) + f(x - t) - f(x + 0) - f(x - 0)$.

Теорема 1 (Дини). *Пусть суммируемая функция $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке x или имеет в ней разрыв первого рода, и для некоторого $\delta > 0$ интеграл $\int_{-\delta}^{\delta} R_f(x, t)/t\, dt$ сходится. Тогда ряд Фурье $\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{2\pi inx}$ сходится к $\frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0))$.*

Доказательство. Согласно предложению 1, $\varphi_N(x) = (D_N * f)(x) = \int_0^1 D_N(t)f(x - t)\, dt$ (мы считаем, что f — периодическая функция на $\mathbb{R}$). Заменяя переменную $t \mapsto -t$, получим $\varphi_N(x) = \int_0^1 D_N(-t)f(x + t)\, dt = \int_0^1 D_N(t)f(x + t)\, dt$ (ядро Дирихле — четная функция), откуда $\varphi_N(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 D_N(t)(f(x - t) + f(x + t))\, dt$. Поскольку $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi int}$, имеем $\int_0^1 D_N(t) = 1$ для любого N.

Тогда $\varphi_N(x) - \frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0)) = \int_0^1 D_N(t)R_f(x, t)\, dt = \int_0^1 S(x, t) \sin \pi(2N + 1)t\, dt$, где $S(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{2 \sin \pi t}$. Пусть δ таково, что $\int_{-\delta}^{\delta} R_f(x, t)/t\, dt$ сходится. Поскольку при достаточно малом t имеем $\pi t/2 < \sin \pi t < \pi t$, интеграл $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{2 \sin \pi t}\, dt$ также сходится. С другой стороны, интегралы $\int_{\delta}^{1-\delta} \frac{f(x\pm t)}{2 \sin \pi t}\, dt$ сходятся, поскольку функция f суммируема, а $1/sin\pi t$ — ограничена на этих отрезках. Сходятся, очевидно, и интегралы $\int_{\delta}^{1-\delta} \frac{f(x\pm 0)}{2 \sin \pi t}\, dt$. Следовательно, функция $S(x, t)/ \sin \pi t$ суммируема на отрезке $[0, 1]$ и, согласно лемме Римана, $\varphi_N(x) - \frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0)) \to 0$ при $N \to \infty$. □

Следствие 1. *Если функция f кусочно непрерывна, в точке x непрерывна или имеет разрыв первого рода, и существуют односторонние производные $f'(x\pm 0)$, то ряд Фурье функции f сходится к $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.*

Доказательство. Действительно, в этом случае $f(x+t)=f(x+0)+f'(x+0)t+o(t)$ и $f(x-t)=f(x-0)+f'(x-0)t+o(t)$, откуда $R_f(x,t)/t\to f'(x+0)+f'(x-0)$ при $t\to 0$. При достаточно малом $t\neq 0$ функция $R_f(x,t)/t$ непрерывна, откуда вытекает, что на малом отрезке $[-\delta,\delta]$ функция $R_f(x,t)/t$ ограничена, и интеграл $\int_{-\delta}^{\delta} R_f(x,t)/t\,dt$ сходится. □

Обозначим $\psi_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\varphi_k(x)$.

Предложение 2. *$\psi_N=f*\Phi_N$, где $\Phi_N(x)=\frac{\sin^2\pi(N+1)x}{(N+1)\sin^2\pi x}$ (ядро Фейера).*

Доказательство. Согласно предложению 1, $\psi_N(x)=f*\Phi_N$, где $\Phi_N=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}D_k=\frac{1}{2i(N+1)\sin\pi x}\sum_{k=0}^{N}(e^{(2k+1)\pi ix}-e^{-(2k+1)\pi ix})=\frac{1}{2i(N+1)\sin\pi x}\left(\frac{e^{\pi ix}-e^{(2N+3)\pi ix}}{1-e^{2\pi ix}}-\frac{e^{-\pi ix}-e^{-(2N+3)\pi ix}}{1-e^{-2\pi ix}}\right)=\frac{1}{2i(N+1)\sin\pi x}\frac{-2+e^{(2N+2)\pi ix}+e^{-(2N+2)\pi ix}}{e^{\pi ix}-e^{-\pi ix}}=$
$-\frac{1}{4(N+1)\sin^2\pi x}(e^{(N+1)\pi ix}-e^{-(N+1)\pi ix})^2=\frac{\sin^2(N+1)\pi x}{(N+1)\sin^2\pi x}$. □

Теорема 2. *Пусть $f:U(1)\to\mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда соответствующая последовательность φ_N равномерно сходится при $N\to\infty$ к функции f — иными словами, ряд Фурье функции f равномерно сходится к ней в смысле среднего арифметического.*

Доказательство. Аналогично теореме 1 имеем $\int_0^1\Phi_N(t)\,dt=1$ для всех N, откуда $|f(x)-\varphi_N(x)|=$ $|f(x)\int_0^1\Phi_N(t)\,dt-(f*\Phi_N)(x)|=\left|\int_0^1(f(x)-f(x-t))\Phi_N(t)\,dt\right|$. Поскольку f непрерывна на компакте, она равномерно непрерывна: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|f(x)-f(x-t)|<\varepsilon$ при $|t|<\delta$. Имеем $|f(x)-\varphi_N(x)|\le I_1+I_2$, где $I_1=\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x-t)|\,\Phi_N(t)\,dt\le\varepsilon$ (поскольку $\Phi_N(t)\ge 0$), а $I_2=\int_{\delta}^{1-\delta}|f(x)-f(x-t)|\,\Phi_N(t)\,dt$. Функция f ограничена: $|f(x)|\le M$, а для ядра Фейера имеет место неравенство $\Phi_N(t)\le\frac{1}{(N+1)\sin^2\pi\delta}$ при $\delta\le t\le 1$. Следовательно, $I_2\le\frac{2M}{(N+1)\sin^2\pi\delta}\to 0$ при $N\to\infty$, и теорема доказана. □

Следствие 2 (теорема Вейерштрасса). *Множество многочленов (всех степеней) плотно в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$.*

Доказательство. Прежде всего, для произвольной непрерывной функции $f(x)$ найдется такое a, что $g(x)=f(x)+x+a$ принимает одинаковые значения в точках 0 и 1, и тем самым является непрерывной функцией на $U(1)$. Согласно теореме 2, существует последовательность $\psi_N(x)$, сходящаяся к $g(x)$ в $C[0,1]$ (т.е. равномерно), где каждая функция $\psi_N(x)$ есть линейная комбинация $e^{\pi ikx}$, $-2N-2\le k\le 2N+2$. Поэтому множество таких линейных комбинаций (тригонометрических многочленов) плотно в $C[0,1]$, и достаточно доказать, что каждую функцию $e^{\pi ikx}$ можно получить как равномерный предел последовательности многочленов. Это вытекает из формулы Тейлора: если $T_n(x)$ — многочлен Тейлора порядка n для $e^{\pi ikx}$, то $e^{\pi ikx}=T_n(x)+\frac{(\pi ik)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\pi ik\xi}$ для некоторого $\xi\in[0,1]$, откуда $|e^{\pi ikx}-T_n(x)|\le\frac{(\pi k)^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$. □

Следствие 3. *Если ряд Фурье непрерывной функции $f:U(1)\to\mathbb{C}$ сходится в точке x, то его сумма равна $f(x)$.*

Доказательство. Действительно, если ряд сходится к числу a, то в смысле средних арифметических он тоже сходится к a. □

Пример 1. Прямое вычисление показывает, что преобразование Фурье функции $f(x)=|x-1/2|$ на отрезке $[0,1]$ устроено так: $c_0(f)=1/4$, $c_{2k+1}(f)=-1/(\pi^2(2k+1)^2)$ и $c_{2k}(f)=0$ при $k=\pm1,\pm2,\dots$. Поэтому ряд Фурье функции есть $1/4+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{2\pi i(2k+1)x}}{\pi^2(2k+1)^2}=1/4-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cos(2k+1)\pi x}{\pi^2(2k+1)^2}$. При $x=1$ получается сходящийся ряд $1/4+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2k+1)^2}$ — следовательно, его сумма равна $f(1)=1/2$, и $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\pi^2/8$. Если теперь $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$, то $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\zeta(2)/4$, откуда $\pi^2/8=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\zeta(2)-\zeta(2)/4$, и $\zeta(2)=\pi^2/6$.