ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Свойства множеств меры нуль. Критерий Римана.

Назовем (прямоугольным) параллелепипедом в $\mathbb{R}^n$ множество Π вида $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$; его объем равен, по определению, $\operatorname{vol}(\Pi) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. Говорят, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ — *множество (лебеговой) меры нуль*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная или счетная система параллелепипедов $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ такая, что $A \subset \bigcup_i \Pi_i$ и $\sum_i \operatorname{vol}(\Pi_i) < \varepsilon$.

Теорема 1. *Свойства множеств меры нуль:*

1) *Подмножество множества меры нуль — множество меры нуль.*
2) *Конечное или счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль.*
3) *Множество меры нуль не содержит ни одного открытого подмножества.*

Доказательство. Свойство 1 очевидно. Докажем свойство 2: пусть $A_1, \dots, A_n, \dots$ — множества меры нуль, и $\varepsilon > 0$. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ существует конечный или счетный набор параллелепипедов с суммарным объемом меньше $\varepsilon/2^i$, покрывающий множество A_i. Объединение всех этих наборов — конечный или счетный набор параллелепипедов, покрывающий $\bigcup_i A_i$ и имеющий суммарный объем меньше, чем $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon/2^i = \varepsilon$.

Для доказательства свойства 3 нам потребуется

Лемма 1. *Пусть $\Pi = \bigcup_{i=1}^N \Pi_i$, где Π и Π_i — параллелепипеды. Тогда $\sum_{i=1}^N \operatorname{vol} \Pi_i \ge \operatorname{vol} \Pi$.*

Доказательство. Пусть $\Pi = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ и $\Pi_i = (a_1^{(i)}, b_1^{(i)}) \times \dots \times (a_n^{(i)}, b_n^{(i)})$. Расположим все точки $a_1^{(i)}$ и $b_1^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, в порядке возрастания — получится разбиение $p_1^{(1)}, \dots, p_1^{(M_1)}$ отрезка $[a_1, b_1]$ (здесь $M_1 \le 2N$); аналогично построим разбиения $p_k^{(1)}, \dots, p_k^{(M_k)}$ отрезков $[a_k, b_k]$ при всех $k = 2, \dots, n$. Рассмотрим теперь новую систему параллелепипедов $P_{s_1,\dots,s_n} = (p_1^{(s_1)}, p_1^{(s_1+1)}) \times (p_n^{(s_n)}, p_n^{(s_n+1)})$, где набор индексов $s = (s_1, \dots, s_n)$ пробегает все множество возможных значений, которое мы обозначим Σ (геометрически это означает, что мы провели гиперплоскость через все грани всех параллелепипедов Π_i; теперь $P_{s_1,\dots,s_n}$ — части, на которые эта система гиперплоскостей разбила Π). Индукцией по размерности легко доказывается, что $\sum_s \operatorname{vol}(P_s) = \operatorname{vol} \Pi$. С другой стороны, каждый параллелепипед Π_i является объединением P_s, где индекс s пробегает некоторое множество Σ_i. Аналогичной индукцией по размерности доказывается, что $\sum_{s \in \Sigma_i} \operatorname{vol}(P_s) = \operatorname{vol} \Pi_i$. Поскольку $\Pi = \bigcup_i \Pi_i$, имеем $\bigcup_i \Sigma_i = \Sigma$, откуда $\sum_{i=1}^N \operatorname{vol} \Pi_i = \sum_{i=1}^N \sum_{s \in \Sigma_i} \operatorname{vol} P_s \ge \sum_{s \in \Sigma} \operatorname{vol} P_s = \operatorname{vol} \Pi$. □

Пусть теперь $A \subset \mathbb{R}^n$ — множество меры нуль, и $B \subset A$ открыто. Тогда существует куб $Q \subset B$. Согласно свойству 1 Q — множество меры нуль, то есть его можно покрыть конечной или счетной системой параллелепипедов Π_i со сколь угодно малым суммарным объемом. Поскольку куб компакт, а параллелепипеды открыты, систему можно считать конечной — но тогда сумма объемов, согласно лемме 1, не может быть меньше, чем $\operatorname{vol} Q$; противоречие. □

Пример 1. Точка, очевидно, является множеством меры нуль. Согласно свойству 2, любое счетное подмножество $\mathbb{R}^n$ тоже имеет меру нуль — например, множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел. Множество $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ не имеет меры нуль — в противном случае меру нуль имел бы отрезок $[0, 1] = A \cup (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$, а это противоречит свойству 3.

Пример 2. Канторово множество $K \subset [0, 1]$ является пересечением множеств $K_1 \supset K_2 \supset \dots$, где $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, $K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, и т.д. Каждое множество K_i это объединение 2^i отрезков общей длиной $(2/3)^i$ — следовательно, его можно покрыть системой интервалов общей длины $(2/3)^i + \varepsilon_i$ для всякого $\varepsilon_i > 0$. Эта же система интервалов покрывает и K, а ее суммарную длину можно сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно большое i — следовательно, K является множеством меры нуль. Это пример несчетного множества меры нуль.

Помеченным разбиением замкнутого параллелепипеда $\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ называется набор последовательностей $a_k = p_0^{(k)} < p_1^{(k)} < \dots < p_{N_k}^{(k)} = b_k$ для всех $k = 1, \dots, n$ и набор точек $\xi_s \in P_s$, где $P_s \overset{\text{def}}{=} P_{s_1,\dots,s_n} = [p_{s_1}^{(1)}, p_{s_1+1}^{(1)}] \times \dots \times [p_{s_n}^{(n)}, p_{s_n+1}^{(n)}]$. Мелкостью помеченного разбиения τ называется величина $\mu(\tau) = \min_{1 \le k \le n} \min_{0 \le s \le N_k - 1} (p_{s+1}^{(k)} - p_s^{(k)})$. Интегральной суммой Дарбу функции $f : \Pi \to \mathbb{R}$ по помеченному разбиению τ называется выражение $I(f, \tau) = \sum_s f(\xi_s) \operatorname{vol}(P_s)$. Верхняя сумма Дарбу $\bar{I}(f, \tau)$ определяется как точная верхняя грань $I(f, \tau)$ по всем выборам пометок ξ_s; аналогично — нижняя сумма Дарбу $\underline{I}(f, \tau)$. *Интегралом Римана* $\int_\Pi f(x)\, dx$ называется предел $\lim_{\mu(\tau) \to 0} I(f, \tau)$.

Теорема 2. *Интеграл $\int_\Pi f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда функция f ограничена и множество ее точек разрыва имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть f ограничена: $|f(x)| \le M$, и множество A ее точек разрыва имеет меру нуль. Назовем колебанием функции f в точке $x \in \Pi$ величину $\lambda(x) = \inf_{Q \ni x} \sup_{a,b \in Q} |f(a) - f(b)|$, где Q — произвольный параллелепипед (содержащий x); очевидно, $\lambda(x) = 0$ тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке x.

Лемма 2. *Для всякого $\varepsilon_0 > 0$ множество $A_{\varepsilon_0} = \{x \in \Pi \mid \lambda(x) \ge \varepsilon_0\}$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть x — предельная точка A_{ε_0}. Тогда всякий параллелепипед $Q \ni x$ содержит точку $y \in A_{\varepsilon_0}$, откуда $\sup_{a,b\in Q} |f(a) - f(b)| \ge \varepsilon_0$. Поскольку Q произволен, $\lambda(x) \ge \varepsilon_0$, то есть $x \in A_{\varepsilon_0}$. $\square$

Зафиксируем теперь $\varepsilon > 0$ и выберем $\varepsilon_0 < \varepsilon/(2\operatorname{vol}(\Pi))$. Множество A_{ε_0} компактно (по лемме 2) и имеет меру нуль (по теореме 1, свойство 1) — следовательно, его можно покрыть конечным семейством $P_1, \ldots, P_N$ открытых параллелепипедов суммарной меры не более $\varepsilon/(4M)$. Дополнение $\Pi \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_N)$ — компакт, для всех точек x которого выполнено неравенство $\lambda(x) < \varepsilon_0$. Докажем, что существует такое δ, что если $x, y \in \Pi \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_N)$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_0$. Пусть это не так: имеются последовательности x_n, y_n, для которых $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon_0$ и $|x - y| < 1/n$. В силу компактности можно считать, что эти последовательности имеют общий предел $a \in \Pi \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_N)$. Но тогда $\lambda(a) \ge \varepsilon_0$, что невозможно.

Рассмотрим теперь два помеченных разбиения τ_1, τ_2, мелкость которых меньше δ. Тогда существует разбиение τ, которое подразбивает как τ_1, так и τ_2 (отсюда $\mu(\tau) < \delta$) и таково, что всякий параллелепипед P_i является объединением нескольких параллелепипедов разбиения τ. Части разбиения τ обозначим Q_s. Тогда $|I(f,\tau_1) - I(f,\tau_2)| \le \bar{I}(f,\tau) - \underline{I}(f,\tau) = \sum_s (\sup_{x\in Q_s} f(x) - \inf_{x \in Q_s} f(x)) \operatorname{vol}(Q_s) = \sum_1 + \sum_2$, где первая сумма берется по параллелепипедам Q_s, не пересекающимся с $P_1, \ldots, P_N$, а вторая — по параллелепипедам Q_s, лежащим внутри $P_1, \ldots, P_N$. Согласно выбору δ имеем $\sum_1 \le \varepsilon_0 \operatorname{vol}(\Pi) < \varepsilon/2$, а согласно выбору покрытия $P_1, \ldots, P_N$ имеем $\sum_2 \le 2M \frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon/2$. Таким образом, $|I(f,\tau_1) - I(f,\tau_2)| < \varepsilon$, то есть отображение $\tau \mapsto I(f,\tau)$ является фундаментальным при $\mu(\tau) \to 0$. Следовательно, оно имеет предел — интеграл Римана существует.

Обратно, пусть $\int_\Pi f(x)\,dx$ существует. Тогда $\lim_{\mu(\tau)\to 0} \bar{I}(f,\tau) - \underline{I}(f,\tau) = 0$. Отсюда следует, что функция f ограничена — в противном случае $\bar{I}(f,\tau) = +\infty$ или $\underline{I}(f,\tau) = -\infty$. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Имеем $\bar{I}(f,\tau) - \underline{I}(f,\tau) = \sum_s (\sup_{x \in Q_s} f(x) - \inf_{x\in Q_s} f(x)) \operatorname{vol}(Q_s) \ge \varepsilon_0 \sum_{s : Q_s \cap A_{\varepsilon_0} \ne \varnothing} \operatorname{vol}(Q_s)$, откуда следует, что суммарный объем параллелепипедов Q_s, пересекающихся с A_{ε_0}, может быть сколь угодно мал. Тем самым для всякого $\varepsilon_0 > 0$ множество A_{ε_0} имеет меру нуль. Следовательно, меру нуль имеет и все множество точек разрыва, которое есть счетное объединение $\bigcup_{k=0}^\infty A_{1/2^k}$. $\square$

Для произвольного ограниченного подмножества $S \subset \mathbb{R}^n$ положим по определению $\int_S f(x)\,dx = \int_\Pi f(x)\chi_S(x)\,dx$, где Π — какой-нибудь параллелепипед, содержащий S, а $\chi_S(x) = 1$ при $x \in S$ и $\chi_S(x) = 0$ при $x \notin S$. Нетрудно проверить, что от выбора Π интеграл не зависит. Величина $\operatorname{vol}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \int_S 1\,dx$ называется объемом (или жордановой мерой) S. Легко убедиться, что для прямоугольного параллелепипеда Q (с ребрами, параллельными осям координат) объем $\operatorname{vol}(Q)$ совпадает с определенным ранее.