ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Замена переменной в интеграле.

Предложение 1. *Пусть $Q(v_1, \dots, v_n)$ — косой параллелепипед, натянутый на векторы $v_1 = (v_{11}, \dots, v_{1n})$, $\dots, v_n = (v_{n1}, \dots, v_{nn})$. Тогда $\mathrm{vol}(Q(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_{ij})|$.*

Для доказательства нам потребуется

Лемма 1 (принцип Кавальери для параллелепипедов). *Пусть $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ — косые параллелепипеды и $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n$ — прямая. Если для каждой прямой $\ell \subset \mathbb{R}^n$, параллельной ℓ_0, пересечения $\ell \cap Q_1$ и $\ell \cap Q_2$ — отрезки одинаковой длины, то $\mathrm{vol}(Q_1) = \mathrm{vol}(Q_2)$.*

Доказательство. Без ограничения общности Q_1 и Q_2 лежат внутри общего прямоугольного параллелепипеда Π. Рассмотрим разбиение τ параллелепипеда Π такое, что все его части $P(s_1, \dots, s_n)$ одинаковы и одна из диагоналей каждой части параллельна прямой ℓ_0 (если ℓ_0 параллельна одной из осей координат, то последнее условие не нужно). Множество частей разбиения τ тем самым естественно разбивается на подмножества-цепочки, такие что диагонали параллелепипедов, принадлежащих одной цепочке, продолжают друг друга (если ℓ_0 параллельна оси координат, то вместо цепочек нужно рассмотреть столбики, параллельные той же оси).

При вычислении суммы Дарбу $I(f, \tau)$ суммирование по всем $s_1, \dots, s_n$ можно произвести в два этапа: сначала просуммировать по частям, принадлежащим одной цепочке, а потом — по множеству всех цепочек. Тогда в суммах Дарбу $I(\chi_{Q_1}, \tau)$ и $I(\chi_{Q_2}, \tau)$ внутренние суммы (по цепочке) будут отличаться максимум на два слагаемых, соответствующих частям, пересекающимся с границей Q_1 и Q_2 соответственно. Таким образом, $|I(\chi_{Q_1}, \tau) - I(\chi_{Q_2}, \tau)| \le \sum_{s : P(s) \cap (\partial Q_1 \cup \partial Q_2) \ne \varnothing} \mathrm{vol}(P(s))$, Поскольку границы ∂Q_1 и ∂Q_2 параллелепипедов имеют меру нуль, правая часть неравенства стремится к нулю при $\mu(\tau) \to 0$, откуда вытекает утверждение леммы. □

Доказательство предложения 1. Из леммы 1 вытекает, что $\mathrm{vol}(Q(v_1, \dots, v_n)) = \mathrm{vol}(Q(v_1, \dots, v_n + \alpha v_i))$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $i = 1, \dots, n$. Иными словами, $\mathrm{vol}(Q(v_1, \dots, v_n))$ не меняется при элементарных преобразованиях столбцов матрицы (v_{ij}). Определитель при этих преобразованиях также не меняется. Элементарными преобразованиями можно привести матрицу (v_{ij}) к диагональному виду — то сделать параллелепипед Q прямоугольным (с ребрами, параллельными осям координат). Для таких параллелепипедов равенство $\mathrm{vol}(Q(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_{ij})|$ вытекает непосредственно из определения объема. □

Предложение 2. *Образ множества меры нуль при гладком отображении $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — множество меры нуль. Каждое мнжество есть объединение не более чем счетного числа ограниченных, так что достаточно доказать утверждение в случае, когда A ограничено: $A \subset \Pi$, где Π — параллелепипед. Покроем A объединением $\bigcup_i P_i$ параллелепипедов общего объема $< \varepsilon$; без ограничения общности, ребро каждого из них не превосходит некоторой константы δ. Выберем в каждом P_i одну из вершин, назовем ее начальной и обозначим O_i.

Пусть $F : \Pi \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение и $\Phi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(O_i) + F'(O_i)(x - O_i)$ — его приближение Тейлора порядка 1 в точке O_i. Множество $Q_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi(P_i)$ — косой параллелепипед, имеющий точку $F(O_i)$ своей вершиной и натянутый на векторы $F'(O_i)v_1, \dots, F'(O_i)v_n$, где $v_1, \dots, v_n$ — векторы ребер P_i (параллельные координатным осям). В силу гладкости всякая точка $F(x) \in F(P_i)$ отстоит от соответствующей точки $\Phi(x) \in Q_i$ на расстояние $o(\delta)$ (при $\delta \to 0$). Следовательно, найдется такая функция $\alpha_i(\delta)$, что $\lim_{\delta \to 0} \alpha_i(\delta) = 1$ и $F(P_i) \subset \alpha_i(\delta) Q_i$, где умножение Q_i на число $\alpha_i(\delta)$ понимается как растяжение параллелепипеда Q_i в $\alpha_i(\delta)$ раз по отношению к его центру. Нетрудно заметить, что это растажение можно взять равномерным по i, то есть выбрать все функции $\alpha_i(\delta)$ одинаковыми.

Отсюда вытекает, что $F(A)$ можно покрыть объединением фигур $\alpha_i(\delta)Q_i$, суммарный объем которых равен $\alpha(\delta) \sum_i \mathrm{vol}(Q_i)$, где $\alpha(\delta) \to 1$ при $\delta \to 0$ — в частности, можно предположить, что $\alpha(\delta) \le 2$. Согласно предложению 1, $\mathrm{vol}\, Q_i = \mathrm{vol}\, P_i \, |\det F'(O_i)|$. В силу гладкости F и компактности Π функция $|\det F'(x)|$ ограничена некоторой константой M — следовательно, $\mathrm{vol}\, Q_i \le M \,\mathrm{vol}\, P_i$. Таким образом, $F(A)$ можно покрыть конечной или счетной совокупностью множеств со сколь угодно малым суммарным объемом — следовательно, $F(A)$ есть множество меры нуль. □

Предложение 3. *Пусть $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные множества, и $S_1 \cap S_2$ — множество меры нуль. Тогда $\int_{S_1 \cup S_2} f(x)\,dx = \int_{S_1} f(x)\,dx + \int_{S_2} f(x)\,dx$, при условии что либо интеграл в левой части, либо оба интеграла в правой части существуют.*

Доказательство. Функция f ограничена на $S_1 \cup S_2$ тогда и только тогда, когда она ограничена на S_1 и S_2. Множество точек разрыва функции $\chi_{S_1 \cup S_2} f$ лежит в объединении множества $S_1 \cap S_2$ и множеств точек разрыва функций $\chi_{S_1} f$ и $\chi_{S_2} f$. Поэтому из существования интеграла в левой части следует существование обоих интегралов в правой и наоборот, по критерию Римана.

Функция $\varphi = \chi_{S_1 \cup S_2} f - \chi_{S_1} f - \chi_{S_2} f$ отлична от нуля только на множестве $S_1 \cap S_2$ меры нуль — следовательно, $\int_\Pi \varphi(x)\,dx = 0$, где Π — произвольный параллелепипед, содержащий $S_1 \cup S_2$, что и означает требуемое равенство. □

Следствие 1. *Если $S_1 \cap S_2$ — множество меры нуль, то $\mathrm{vol}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{vol}(S_1) + \mathrm{vol}(S_2)$, при условии что либо объем в левой части либо оба объема в правой части существуют.*

Теорема 1. *Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — прямоугольный параллелепипед, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, для которого $F|_\Pi$ — диффеоморфизм $\Pi \to F(\Pi)$, а $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция, интегрируемая по Риману на множестве $F(\Pi)$. Тогда $\int_{F(\Pi)} f(y)\,dy = \int_\Pi f(F(x))\,|\det F'(x)|\,dx$.*

Доказательство. Заметим вначале, что, поскольку F^{-1} — гладкое отображение, функция $f = F^{-1} \circ F \circ f$ имеет, согласно предложению 2, множество точек разрыва меры нуль и, следовательно, интегрируема по Риману.

Пусть τ — разбиение параллелепипеда Π, и $\mu(\tau) < \delta$. Тогда для всякой ограниченной функции φ имеем $\int_{P_i} \varphi(x)\,dx = \varphi(O_i)\,\mathrm{vol}(P_i) + o(\delta^n)$, $\delta \to 0$, где P_i — любой параллелепипед разбиения τ, а O_i — одна из его вершин.

Поскольку $F|_\Pi : \Pi \to F(\Pi)$ — диффеоморфизм, $F(\Pi) = \bigcup_i F(P_i)$, причем различные множества $F(P_i)$ пересекаются, согласно предложению 2, по множеству меры нуль. Отсюда, согласно предложению 3, $\int_{F(\Pi)} f(y)\,dy = \sum_i \int_{F(P_i)} f(y)\,dy$. Пусть O_i — какая-нибудь вершина параллелепипеда P_i; тогда $\left|\int_{F(P_i)} f(y)\,dy - f(F(O_i))\,\mathrm{vol}(F(P_i))\right| \le \lambda_i\,\mathrm{vol}(F(P_i))$, где $\lambda_i \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{a,b \in F(P_i)} |f(a) - f(b)|$.

Пусть $F_i(x) = F(O_i) + F'(O_i)(x - O_i)$ — приближение Тейлора порядка 1 отображения F в точке O_i, и $Q_i = F_i(P_i)$ (косоугольный параллелепипед). Тогда, как и в доказательстве предложения 2, $F(P_i) \subset \alpha_i(\delta)(Q_i)$ и $Q_i \subset \beta_i(\delta)F(P_i)$, где $\alpha_i(\delta), \beta_i(\delta) \to 1$ при $\delta \to 0$. Следовательно, $\mathrm{vol}(F(P_i)) = \mathrm{vol}(Q_i) + o(\delta^n)$ при $\delta \to 0$, причем $o(\cdot)$ равномерно по i (почему ?). Для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество $U \subset \Pi$ объема меньше ε, что $\lambda_i \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно по i для всех параллелепипедов P_i, не пересекающихся с U (ср. доказательство критерия Римана в лекции 2). Тем самым получается, что при $\delta \to 0$ м всякого такого P_i имеем $\int_{F(P_i)} f(y)\,dy = f(O_i)\,\mathrm{vol}(F(P_i)) + o(\delta^n) = f(F(O_i))\,|\det F'(O_i)|\,\mathrm{vol}(P_i) + o(\delta^n)$ (согласно предложению 1), где $o(\cdot)$, опять-таки, равномерно по i.

Без ограничения общности можно считать, что всякое ребро параллелепипеда P_i имеет размер от $\delta/2$ до δ. Тогда количество частей в разбиении есть $O(1/\delta^n)$. Количество частей, для которых $\lambda_i \not\to 0$, можно взять произвольно малым (поскольку объем U можно выбрать сколь угодно малым). Отсюда имеем $\int_{F(\Pi)} f(y)\,dy = \sum_i f(F(O_i))\,|\det F'(O_i)|\,\mathrm{vol}(P_i) + o(1)$ при $\delta \to 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем утверждение теоремы. □

Следствие. *Объем множества не меняется при ортогональных преобразованиях (движениях $\mathbb{R}^n$).*

Действительно, если $F(x) = Ax + b$, где $AA^T = I$, имеем $F'(x) = A$ и $\det F'(x) = \pm 1$ для всех x.

Верхней мерой подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\mu^*(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf \sum_i \mathrm{vol}(Q_i)$, где Q_i — прямоугольные параллелепипеды со сторонами, параллельными осям координат, а точная нижняя грань берется по всем конечным или счетным множествам параллелепипедов Q_i таких, что $A \subset \bigcup_i Q_i$.

Предложение 4 (счетная монотонность верхней меры). *Если $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, то $\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покроем A_n объединением параллелепипедов суммарным объемом меньше $\mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. Тогда суммарный объем всех построенных параллелепипедов не будет превосходить $\sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) + \varepsilon$, откуда вытекает требуемое неравенство. □

Предложение 5. *Если множество A измеримо по Жордану ($\mathrm{vol}(A) = \int_\Pi \chi_A(x)\,dx$ существует, где Π — параллелепипед, содержащий A $\Leftrightarrow$ множество A ограничено и его граница ∂A имеет меру нуль), то $\mu^*(A) = \mathrm{vol}(A)$.*

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup_i Q_i$; без ограничения общности $Q_i \subset \Pi$. Тогда $\chi_A(x) \le \sum_i \chi_{Q_i}(x)$. Интегрируя это неравенство по Π получаем $\mathrm{vol}(A) \le \sum_i \mathrm{vol}(Q_i)$, откуда, переходя к точной нижней грани, получаем $\mathrm{vol}(A) \le \mu^*(A)$.

С другой стороны, из существования $\int_\Pi \chi_A(x)\,dx$ вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ имеется конечный набор параллелепипедов Q_i таких, что $A \subset \bigcup_i Q_i$ и $\sum_i \mathrm{vol}(Q_i) \le \mathrm{vol}(A) + \varepsilon$ — нужно в качестве Q_i взять набор частей любого достаточно мелкого разбиения Π. Отсюда $\mu^*(A) \le \mathrm{vol}(A)$, то есть $\mu^*(A) = \mathrm{vol}(A)$. $\square$

Замечание 1. Очевидно, $\mu^*(A) = 0$ означает, что A — множество меры нуль.

Замечание 2. Верхняя мера конечна у любого ограниченного множества. Однако у неограниченного множества она тоже может быть конечной. Например, если $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, n+1/n^2] \subset \mathbb{R}$, то $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$.