ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Измеримые множества и измеримые функции.

Разобьем пространство $\mathbb{R}^n$ на непересекающиеся параллелепипеды: $\mathbb{R} = \bigsqcup_i \Pi_i$.

Определение. Множество $A \subset \Pi_i$ называется измеримым по Лебегу, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество $B \subset \Pi_i$, измеримое по Жордану и такое, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$, где Δ означает симметрическую разность. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Лебегу, если все множества $A \cap \Pi_i$ измеримы по Лебегу.

Если в этом определении заменить слова "измеримое по Жордану" на "конечное объединение прямоугольных параллелепипедов со сторонами, параллельными осям координат", то получится эквивалентное определение — этот факт доказывается так же, как предложение 5 лекции 3. Нетрудно проверить, что понятие измеримого множества не зависит от выбора разбиения $\mathbb{R}^n$ на параллелепипеды.

Если $A \subset \Pi_i$ — множество, измеримое по Лебегу, то $\mu^*(A)$ называется его мерой Лебега и обозначается $\mu(A)$. Для измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ мерой Лебега называется $\mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mu(A \cap \Pi_i) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Теорема 1. *Конечное или счетное объединение и пересечение, а также разность множеств, измеримых по Лебегу, измеримы по Лебегу. Если $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где все A_n измеримы по Лебегу и попарно не пересекаются, то $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Доказательство. Конечное объединение, пересечение и разность множеств, измеримых по Жордану, измеримы по Жордану. Этот факт следует из критерия Римана (теорема 2 лекции 2). Очевидно также, что достаточно доказать теорему для ограниченных множеств, т.е. таких, что $A \subset \Pi$, где Π — некоторый параллелепипед.

Пусть $A_1, A_2 \subset \Pi$ измеримы по Лебегу. Выберем множества B_1, B_2, измеримые по Жордану и такие, что $\mu^*(A_i \Delta B_i) < \varepsilon$. Тогда в силу включения $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ и монотонности верхней меры (предложение 4 лекции 3) получим неравенство $\mu^*((A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2)) < 2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произволен, это означает, что множество $A_1 \cup A_2$ измеримо по Лебегу — следовательно, любое конечное объединение измеримых множеств также измеримо. Утверждение про конечные пересечения и про разность доказывается аналогично.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1. *$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A \Delta B)$.*

Доказательство. Из включения $A \subset B \cup (A \Delta B)$ и монотонности верхней меры вытекает, что $\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B)$. Меняя местами A и B, получаем обратное неравенство. □

Докажем теперь аддитивность меры Лебега для двух слагаемых, то есть равенство $\mu(A_1 \sqcup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Рассмотрим множества B_1, B_2, измеримые по Жордану и такие, что $\mu^*(A_i \Delta B_i) \le \varepsilon$ при $i = 1, 2$. Из леммы 1 вытекают неравенства $|\mu(A_1) - \mu(B_1)| < \varepsilon$ и $|\mu(A_2) - \mu(B_2)| < \varepsilon$, а из включения $(A_1 \sqcup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_1 \Delta B_1)$, леммы 1 и монотонности верхней меры — неравенство $|\mu(A_1 \sqcup A_2) - \mu(B_1 \cup B_2)| < 2\varepsilon$. С другой стороны, $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$, поскольку множества A_1 и A_2 не пересекаются, откуда $\mu(B_1 \cap B_2) < 2\varepsilon$ в силу монотонности.

Множества B_1 и B_2 измеримы по Жордану, и для их характеристических функций имеет место равенство $\chi_{B_1 \cup B_2} = \chi_{B_1} + \chi_{B_2} - \chi_{B_1 \cap B_2}$. Из определения объема (меры Жордана) и предложения 5 лекции 3 вытекает равенство $\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2)$, откуда $|\mu(B_1 \cup B_2) - \mu(B_1) - \mu(B_2)| < 2\varepsilon$. Складывая выписанные неравенства, получаем, что $|\mu(A_1 \sqcup A_2) - \mu(A_1) - \mu(A_2)| < 6\varepsilon$ при всяком $\varepsilon > 0$ — аддитивность для двух слагаемых доказана; из нее вытекает аддитивность для любого конечного количества слагаемых.

Пусть теперь $A_1, \dots, A_n, \dots$ измеримы по Лебегу. Положим $A_1' = A_1$, $A_2' = A_2 \setminus A_1$, $A_3' = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, и т.д. Как уже доказано, все множества A_i' измеримы по Лебегу. Множества A_i' попарно не пересекаются; отсюда и из конечной аддитивности вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n') = \mu(A_n)$. Поскольку все множества A_n лежат в параллелепипеде Π, имеем $\mu(A_n) < \mu(\Pi)$, откуда вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n')$ сходится.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для каждого n найдем множество B_n, измеримое по Жордану и такое, что $\mu^*(A_n' \Delta B_n) < \varepsilon/2^n$. Тогда $\mu(B_n) < \mu(A_n') + \varepsilon/2^n$, откуда вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ сходится. Пусть теперь N таково, что $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(B_n) < \varepsilon$. Обозначим $\tilde{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и $B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$. Поскольку $A \Delta B \subset (A \Delta \tilde{B}) \cup$

$(\tilde{B}\Delta B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n'\Delta B_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n$, имеем, согласно монотонности, $\mu^*(A\Delta B) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n'\Delta B_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty}\mu^*(B_n) \leq 2\varepsilon$. Поскольку B измеримо по Жордану и ε произвольно, A измеримо по Лебегу.

Пусть теперь $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Из монотонности верхней меры вытекает, что $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. Из конечной аддитивности вытекает, что $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{N}\mu(A_n)$, откуда предельным переходом получается $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. □

Пример 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Для всякой точки $x \in U$ с рациональными координатами и для всякого $r \in \mathbb{Q}$ рассмотрим открытый шар $B_r(x)$. Поскольку U открыто, для всякой точки $y \in U$ найдется $\varrho > 0$ такое, что $B_\varrho(y) \subset U$. Нетрудно видеть, что найдется точка $x \in B_\varrho(y)$ с рациональными координатами и число $r \in \mathbb{Q}$ такое, что $y \in B_r(x) \subset B_\varrho(y)$. Следовательно, $U = \bigcup_{x,r} B_r(x)$, где объединение берется по всем $x \in U$, имеющим рациональные координаты и всем $r \in \mathbb{Q}$ таким, что $B_r(x) \subset U$. Тем самым произвольное открытое множество является счетным объединением шаров и, следовательно, измеримо по Лебегу. Отсюда вытекает, что измеримо по Лебегу всякое замкнутое множество (как дополнение к открытому). Также измеримы по Лебегу счетные пересечения замкнутых множеств и счетные объединения открытых.

Пример 2. Построим пример множества $M \subset [0,1]$, не измеримого по Лебегу. Для этого рассмотрим преобразование $f : [0,1] \to [0,1]$, заданное равенством $f(x) = x + \alpha \bmod 1$, где $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Орбиты преобразования f (т.е. множества точек $\Omega_x \stackrel{\text{def}}{=} \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ для каждого фиксированного x) — плотные счетные множества. Очевидно, для любых $x.y \in [0,1]$ их орбиты Ω_x, Ω_y либо не пересекаются, либо совпадают.

Возьмем из каждой орбиты Ω_x по одной точке; эти точки и образуют множество M. Иными словами, пересечение $M \cap \Omega_x$ для каждой орбиты Ω_x состоит из одной точки; существование такого множества M (для любого семейства попарно непересекающихся множеств Ω_x) — одна из аксиом теории множеств, называемая аксиомой выбора.

Пусть M измеримо по Лебегу и $\mu(M) = s$. Множества $f^k(M) \subset [0,1]$ при различных $k \in \mathbb{Z}$ не пересекаются, поскольку $\alpha \notin \mathbb{Q}$. С другой стороны, как нетрудно видеть, преобразование f сохраняет меру: $\mu(f^k(M)) = s$ для всех k. Поскольку $[0,1] = \bigcup_l f^k(M)$, получаем в силу счетной аддитивностью меры Лебега в случае $s = 0$ равенство $\mu([0,1]) = 0$, а в случае $s > 0$ равенство $\mu([0,1]) = \infty$ — оба равенства неверные.

Говорят, что последовательность функций $f_n : A \to \mathbb{R}$, где A — измеримое множество, сходится к функции $f : A \to \mathbb{R}$ почти всюду, если существует такое множество $B \subset A$, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $f_n(x) \to f(x)$ для всякого $x \in B$.

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если для всякого $a \in \mathbb{R}$ множество $L_a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid f(x) < a\}$ измеримо по Лебегу.

Теорема 2. *Множество измеримых функций образует алгебру, замкнутую относительно сходимости почти всюду.*

Лемма 2. *Если f измерима, то f^2 и $|f|$ измеримы; для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ функция λf измерима.*

Доказательство очевидно.

Лемма 3. *Если f_1 и f_2 измеримы, то $f_1 + f_2$ измерима.*

Доказательство. Для всякого $a \in \mathbb{R}$ и всякого $r \in \mathbb{Q}$ множество $M_{a,r} \stackrel{\text{def}}{=} L_r(f_1) \cap L_{a-r}(f_2)$ измеримо как пересечение измеримых. Множество $L_a(f_1 + f_2) = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}} M_{a,r}$ измеримо как счетное объединение измеримых. □

Лемма 4. *Если f_1 и f_2 измеримы, то $f_1 f_2$ и $\max(f_1, f_2)$ измеримы.*

Доказательство. $f_1 f_2 = (f_1 + f_2)^2/4 - (f_1 - f_2)^2/4$, так что измеримость $f_1 f_2$ следует из лемм 2 и 3. То же самое для $\max(f_1, f_2)$ в силу равенства $\max(f_1, f_2) = (f_1 + f_2)/2 + |f_1 - f_2|/2$. □

Доказательство теоремы 2. Осталось доказать только замкнутость относительно сходимости почти всюду. Предположим сначала, что последовательность f_n монотонно возрастает и сходится к f всюду, кроме множества A меры нуль. Тогда $L_a(f) = A' \cup \bigcap_n L_n(f)$, где $A' \subset A$ имеет меру нуль, откуда следует, что $L_a(f)$ измеримо. Аналогично доказывается теорема в случае, когда f_n монотонно убывает.

Для произвольной последовательности f_n функция $f_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} \max(f_n, \ldots, f_m)$ измерима по лемме 4. Поскольку $f_{n,m+1} \geq f_{nm}$, функция $F_n = \lim_{m\to\infty} f_{nm}$ измерима. Очевидно, $F_n \geq F_{n+1}$, откуда следует, что функция $F \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} F_n$ измерима. Но, как нетрудно видеть, $F = \lim_{n\to\infty} f_n$. □