ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Определение интеграла Лебега.

Лемма 1. *Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ — последовательность измеримых множеств, и $\mu(A_n) < \infty$ для всех n, то $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, то $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ (при этом в обеих частях равенства может стоять $+\infty$).*

Доказательство. Обозначим $A = \bigcap_n A_n$; тогда $A_1 = A \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$, где все множества в правой части измеримы и не пересекаются. Следовательно, $\mu(A_1) = \mu(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n+1})$. Поскольку $A_{n+1} \subset A_n$, имеем $\mu(A_n \setminus A_{n+1}) = \mu(A_n) - \mu(A_{n+1})$, откуда вытекает первое утверждение. Второе доказывается аналогично. $\square$

Теорема 1 (Егорова). *Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — параллелепипед, и $f_n \to f$ почти всюду на Π. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \subset \Pi$ такое, что $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f_n \to f$ равномерно на $\Pi \setminus A_\varepsilon$.*

Доказательство. Для всякого $\delta > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $B_n(\delta) = \{x \in \Pi \mid \exists k \ge n, |f_k(x) - f(x)| \ge \delta\}$. Обозначим $B(\delta) = \bigcap_n B_n(\delta)$. Если $x \in B(\delta)$, то $f_n(x) \not\to f(x)$, откуда $\mu(B(\delta)) = 0$. Из леммы 1 вытекает, что $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n(\delta)) = 0$. Следовательно, для всякого n существует k_n такое, что $\mu(B_{k_n}(1/n)) < \varepsilon/2^n$. Пусть $A_\varepsilon = \bigcup_n B_{k_n}$. Тогда $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, и если $x \notin A_\varepsilon$, то $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$ для любого n — следовательно, $f_n \rightrightarrows f$ равномерно на $\Pi \setminus A_\varepsilon$. $\square$

Измеримая функция называется *простой*, если множество ее значений не более чем счетно. Как нетрудно проверить, это эквивалентно тому, что функция представима в виде $f = \sum_n a_n \chi_{A_n}$, где все множества A_n измеримы и попарно не пересекаются.

Пусть $f = \sum_n a_n \chi_{A_n}$, где все A_n измеримы. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_n)$ абсолютно сходится, то его сумма (которая тем самым не зависит от порядка слагаемых) называется интегралом Лебега от f и обозначается $\int f(x)\,dx$. Функция f в этом случае называется суммируемой.

Предложение 1. *Определение интеграла Лебега от простой функции корректно. Интеграл Лебега — линейный функционал на множестве суммируемых простых функций: $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$ и $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_1(x)\,dx$.*

Доказательство. Пусть $f = \sum_n a_n \chi_{A_n} = \sum_k b_k \chi_{B_k}$, где все A_n и B_k измеримы (мы не предполагаем, что все a_n или все b_k различны). На каждом непустом множестве $C_{nk} = A_n \cap B_k$ функция f постоянна и принимает значение $c_{nk} = a_n = b_k$. Тогда $f = \sum_{n,k} c_{n,k} \chi_{C_{nk}}$, и из равенств $A_n = \bigcup_k C_{nk}$ и $B_k = \bigcup_n C_{nk}$ вытекает, что $\sum_n a_n \mu(A_n) = \sum_n \sum_k c_{nk} \mu(C_{nk})$ (в силу счетной аддитивности меры) $= \sum_k \sum_n c_{nk} \mu(C_{nk})$ (поскольку это ряд с положительными членами) $= \sum_k b_k \mu(B_k)$, то есть определение интеграла от простой функции корректно.

Равенство $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$ очевидно. Пусть теперь $f_1 = \sum_n a_n \chi(A_n)$ и $f_1 = \sum_k b_k \chi(B_k)$, где все A_n, B_k измеримы. Тогда $C_{nk} = A_n \cap B_k$ — измеримое множество, и $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \sum_{n,k} (a_n + b_k) \mu(C_{nk}) = \sum_n a_n \sum_k \mu(C_{nk}) + \sum_k b_k \sum_n \mu(C_{nk}) = \sum_n a_n \mu(A_n) + \sum_k b_k \mu(B_k) = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$. $\square$

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой), если существует последовательность суммируемых простых функций f_n, сходящаяся к f почти всюду и такая, что $\int |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \to 0$ при $m, n \to \infty$. Интегралом Лебега от суммируемой функции называется предел $\int f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx$.

Предложение 2. *Определение интеграла Лебега корректно.*

Доказательство. Согласно предложению 1 достаточно доказать, что если f_n — последовательность простых функций, сходящаяся к нулю почти всюду и такая, что $\int |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \to 0$ при $m, n \to \infty$, то $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = 0$. Предположим, что это не так; переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\left|\int f_n(x)\,dx\right| \ge \delta > 0$, откуда $\int |f_n(x)|\,dx \ge \delta$ (почему ?). Переходя еще раз к подпоследовательности, можно добиться того, чтобы $\int |f_n(x) - f_{n+1}(x)|\,dx \le \delta/2^{n+2}$.

Функция $|f_1|$ — простая: $f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \chi_{A_n}$. Поскольку $\int |f_1(x)|\,dx \ge \delta$, найдется такой номер N, что $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \mu(A_n) \ge 3\delta/4$. Пусть $M = \max(a_1, \dots, a_N)$ и $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. По теореме 1 найдется такое множество $B \subset A$, что $\mu(B) < \delta/4M$, и $f_n \to 0$ равномерно на $A \setminus B$. Равномерная сходимость означает, что числовая последовательность $C_n = \max_{x \in B\setminus A} |f_n(x)|$ стремится к нулю. Теперь $\int_{A\setminus B} |f_n(x)|\,dx \le$

$C_n\mu(A) \to 0$ (поскольку f_1 суммируема, все множества A_n имеют конечные меры, а следовательно, и $\mu(A)$ конечна). С другой стороны, $\int_{A\setminus B} |f_1(x)|\, dx = \int_A |f_1(x)|\, dx - \int_B |f_1(x)|\, dx \ge 3\delta/4 - \delta/4M \cdot M = \delta/2$, но $\left|\int_{A\setminus B} |f_n(x)|\, dx - \int_{A\setminus B} |f_{n+1}(x)|\, dx\right| \le \int_{A\setminus B} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|\, dx \le \int_A |f_n(x) - f_{n+1}(x)|\, dx\delta/2^{n+2}$. Тем самым $\int_{A\setminus B} |f_n(x)|\, dx \ge \int_{A\setminus B} |f_1(x)|\, dx - \sum_{k=1}^{n-1}\left|\int_{A\setminus B} |f_k(x)|\, dx - \int_{A\setminus B} |f_{k+1}(x)|\, dx\right| \ge \delta/2 - \sum_{k=1}^{n-1} \delta/2^{k+2} \ge \delta/4$, что противоречит доказанной выше сходимости $\int_{A\setminus B} |f_n(x)|\, dx \to 0$. □

Следствие 1. *1) Интеграл Лебега $\int f(x)\,dx$ линеен по функции f.*

2) Если функция $|f(x)|$ суммируема, то функция $f(x)$ также суммируема.

Доказательство. Свойство 1 получается из предложения 1 предельным переходом.

Свойство 2 для простых функций вытекает непосредственно из определения. Если теперь функция $|f(x)|$ суммируема и g_n — последовательность простых функций из определения ее интеграла Лебега, то положим $f_n(x) = g_n(x)\operatorname{sgn}(f(x))$. Функции f_n — простые и суммируемые; очевидно, $f_n(x) \to f(x)$ при тех же x, что и $g_n(x) \to |f(x)|$, то есть почти всюду. В то же время $\int f_n(x) - f_m(x)\,dx = \pm\int g_n(x) - g_m(x)\,dx \to 0$ при $m, n \to \infty$, откуда вытекает, что f суммируема. □