ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Теорема Фубини.

Предложение 1. *Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — параллелепипед, а функция $f : \Pi \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману. Тогда f суммируема по Лебегу, и ее интеграл Лебега равен интегралу Римана.*

Доказательство. Если $\Pi = \bigsqcup_i \Pi_i$ — разбиение параллелепипеда Π, и функция f постоянна на каждой части Π_i разбиения, то доказательство утверждения — несложное упражнение (проделайте !). Пусть τ_n — последовательность разбиений с мелкостью $\mu(\tau_n) \to 0$ и таких, что для каждого n разбиение τ_{n+1} — подразбиение (измельчение) τ_n. Определим ступенчатую функцию g_{τ_n} равенством $g_{\tau_n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in \Pi_i} f(x)$ для всех $x \in \Pi_i$. Если x — точка непрерывности f, то, очевидно, последовательность $g_{\tau_n}(x)$ сходится к $f(x)$. Тем самым $g_{\tau_n} \to f$ почти всюду по критерию Лебега. Интеграл Римана $\int_\Pi g_{\tau_n}(x)\,dx$ это верхняя сумма Дарбу $\bar{I}(\tau_n, f) = \sum_i \sup_{x \in \Pi_i} f(x)\operatorname{vol}(\Pi_i)$, откуда вытекает, что последовательность интегралов Римана $\int_\Pi g_{\tau_n}(x)\,dx$ сходится к интегралу Римана $\int_\Pi f(x)\,dx$ и, следовательно, фундаментальна. Поскольку τ_m — подразбиение (измельчение) τ_n при всех $m > n$, последовательность $g_{\tau_n}(x)$ убывает при каждом x, откуда $\int_\Pi |g_{\tau_n}(x) - g_{\tau_m}(x)|\,dx = \left|\int g_{\tau_n}(x)\,dx - \int g_{\tau_m}(x)\,dx\right| \to 0$ при $m, n \to \infty$. Но g_{τ_n} постоянна на каждой части разбиения τ_n, и поэтому $\int_\Pi g_{\tau_n}(x)\,dx$ является также и интегралом Лебега от g_{τ_n}. По определению, интеграл Лебега от f равен $\lim_{n\to\infty} \int_\Pi g_{\tau_n}(x)\,dx$, то есть интегралу Римана от f. □

Лемма 1. *Если множества $A \subset \mathbb{R}^m$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу, то множество $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ также измеримо, и $\mu_{m+n}(A \times B) = \mu_m(A)\mu_n(B)$.*

Доказательство. Пусть сначала $A \subset \Pi_1$, $B \subset \Pi_2$ (Π_1, Π_2 — параллелепипеды), и A и B измеримы по Жордану. Тогда $\mu_{m+n}(A \times B) = \int_{\Pi_1 \times \Pi_2} \chi_{A\times B}(x)\,dx$. Пусть τ_1 — разбиение Π_1, τ_2 — разбиение Π_2, тогда $\tau_1 \times \tau_2$ — разбиение $\Pi_1 \times \Pi_2$, и для верхних сумм Дарбу имеем $\bar{I}(\chi_{A\times B}, \tau_1 \times \tau_2) = \bar{I}(\chi_A, \tau_1)\bar{I}(\chi_B, \tau_2)$. Переходя к пределу, получаем $\int_{\Pi_1\times\Pi_2} \chi_{A\times B}(x)\,dx = \int_{\Pi_1} \chi_A(x)\,dx \int_{\Pi_2} \chi_B(x)\,dx = \mu_m(A)\mu_n(B)$.

Пусть теперь A и B измеримы и ограничены. Рассмотрим измеримые по Жордану множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, для которых $\mu_m(A\Delta\tilde{A}) < \varepsilon$, $\mu_n(B\Delta\tilde{B}) < \varepsilon$. Тогда $\mu_{m+n}((A \times B)\Delta(\tilde{A} \times \tilde{B})) < \varepsilon(\mu_m(\Pi_1) + \mu_n(\Pi_2))$, откуда вытекает, что $A \times B$ измеримо. Кроме того, $|\mu_m(\tilde{A}) - \mu_m(A)| < \varepsilon$ и $|\mu_n(\tilde{B}) - \mu_n(B)| < \varepsilon$ (по лемме 1 лекции 4), откуда $|\mu_m(\tilde{A})\mu_n(\tilde{B}) - \mu_m(A)\mu_n(B)| = |\mu_m(\tilde{A})\mu_n(\tilde{B}) - \mu_m(\tilde{A})\mu_n(B) + \mu_m(\tilde{A})\mu_n(B) - \mu_m(A)\mu_n(B)| \le \mu_m(\tilde{A})\,|\mu_n(\tilde{B}) - \mu_n(B)| + \mu_n(B)\,|\mu_m(\tilde{A}) - \mu_m(A)| < \varepsilon(\mu_m(\tilde{A}) + \mu_n(B))$. С другой стороны, $|\mu_{m+n}(A \times B) - \mu_m(\tilde{A})\mu_n(\tilde{B})| = |\mu_{m+n}(\tilde{A} \times \tilde{B}) - \mu_{m+n}(A \times B)| < \varepsilon(\mu_m(\Pi_1) + \mu_n(\Pi_2))$, откуда $|\mu_{m+n}(A \times B) - \mu_m(A)\mu_n(B)| < const. \cdot \varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$, то есть $\mu_{m+n}(A \times B) = \mu_m(A)\mu_n(B)$.

Доказательство леммы для неограниченных измеримых A и B — упражнение. □

Пусть $C \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Определим функцию $f_C(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_n(\{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in C\})$.

Теорема 1. *Функция $f_C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{+\infty\}$ определена почти всюду на $\mathbb{R}^m$ и измерима. Имеет место равенство $\int f_C(x)\,dx = \mu_{m+n}(C)$.*

Доказательство. Пусть вначале $C = A \times B$, где $A \subset \mathbb{R}^m$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ измеримы. Тогда f_C определена всюду и, очевидно, измерима. Равенство $\int f_C(x)\,dx = \mu_{m+n}(C)$ вытекает из леммы 1.

Пусть теперь $C = \bigsqcup_{i=1}^\infty C_i$ — счетное объединение непересекающихся множеств, причем для каждого множества C_i теорема верна. Тогда $f_C = \sum_i f_{C_i}(x)$ определена почти всюду: ряд из положительных чисел всегда имеет сумму в $\mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{+\infty\}$, так что $f_C(x)$ не существует только при тех x, при которых не существует одна из $f_{C_i}(x)$, т.е. на счетном объединении множеств меру нуль. Измеримость f_C вытекает из теоремы 2 лекции 4. Равенство $\int f_C(x)\,dx = \mu_{m+n}(C)$. вытекает из счетной аддитивности меры Лебега.

Теперь достаточно доказывать теорему в случае ограниченного множества C (поскольку всякое множество есть счетное объединение непересекающихся ограниченных множеств). Пусть $C_1 \subset C_2 \subset \dots$, и $C = \bigcup_i C_i \subset \Pi$. Если для всех множеств C_i теорема верна, то она верна и для C. Действительно, в этом случае последовательность $f_{C_i}(x)$ монотонно возрастает и сходится к $f_C(x)$ согласно лемме 1 лекции 5. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что f_C определена почти всюду и измерима. По теореме Егорова для всякого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $Q \subset \Pi$ такое, что $\mu(Q) < \varepsilon$ и $f_{C_i}(x) \to f_C(x)$ при $i \to \infty$ равномерно на $\Pi \setminus Q$. Поскольку $C \subset \Pi$, функция f_C и все функции f_{C_i} ограничены: $|f_{C_i}(x)| < M$ и $|f_C(x)| < M$ для некоторой константы M и произвольного i. Пусть $|f_{C_i}(x) - f_C(x)| < \varepsilon$ при $i > N$ и произвольном $x \in \Pi \setminus Q$, тогда $\left|\int f_{C_i}(x)\,dx - \int f_C(x)\,dx\right| \le \int_\Pi |f_{C_i}(x) - f_C(x)|\,dx = \int_{\Pi\setminus Q} + \int_Q \le \varepsilon\mu(\Pi) + 2\varepsilon M$. Отсюда вытекает, что $\int f_C(x)\,dx = \lim_{i\to\infty}\int f_{C_i}(x)\,dx = \lim_{i\to\infty}\mu_{m+n}(C_i) = \mu_{m+n}(C)$ (по лемме 1 лекции 5).

Аналогично доказывается, что если $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ ограничены, и $C = \bigcap_i C_i$, то если теорема верна для всех C_i, то она верна и для C.

Пусть теперь $C_1 \Delta C_2$ — множество меры нуль, и для C_2 теорема верна. Тогда она верна и для C_1. Действительно, пусть $C_1\Delta C_2 \subset \bigcup_i \Pi_i$, где $\sum_i \mu(\Pi_i) < \varepsilon$. Тогда $\mu(\{x \mid |f_{C_1}(x) - f_{C_2}(x)| > a\}) < \varepsilon/a$ (почему ?). Отсюда следует, что функции f_{C_1} и f_{C_2} совпадают почти всюду.

Пусть теперь C — измеримое ограниченное множество. Для всякого N существует измеримое по Жордану множество Q_N такое, что $\mu_{m+n}(C\Delta Q_N) < 1/2^{N+1}$. В то же время для измеримого по Жордану множества существует такое конечное объединение непересекающихся параллелепипедов $C_N = \bigsqcup_i A_i^{(N)} \times B_i^{(N)}$, где $A_i^{(N)} \subset \mathbb{R}^m$ и $B_i^{(N)} \subset \mathbb{R}^n$, что $\mu_{m+n}(Q_N \Delta C_N) < 1/2^{N+1}$ и, следовательно, $\mu_{m+n}(C\Delta C_N) < 1/2^N$. Как уже доказано, для параллелепипедов $A_i^{(N)} \times B_i^{(N)}$ теорема верна, и, следовательно, она верна для множеств C_N. Множества $D_N = \bigcap_{i\ge N} C_N$ представимы в виде счетного объединения непересекающихся параллелепипедов (почему ?), так что для них теорема тоже верна. Поскольку $D_1 \subset D_2 \subset \dots$, теорема верна и для множества $D = \bigcup_N D_N$. С другой стороны, $\mu(C\Delta D_N) < 1/2^{N-1}$, откуда вытекает, что $\mu(C\Delta D) = 0$, и теорема верна для множества C. □

Следствие 1 (теорема Фубини). *Пусть $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ — суммируемая по Лебегу функция. Тогда функция $f(x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ суммируема при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$, функция $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ суммируема при почти всех $y \in \mathbb{R}^n$, и $\int f(x,y)\,dxdy = \int\left(\int f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int\left(\int f(x,y)\,dx\right)\,dy$.*

Доказательство. Пусть $f_+ = \max(f,0)$, $f_- = -\min(f,0)$. Тогда $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, так что теорему достаточно доказать для неотрицательных функций. Пусть f неотрицательна. Рассмотрим подграфик $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \le z \le f(x,y)\}$. Согласно теореме 1, $\mu_{m+n+1}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \mu_1(\{z \mid 0 \le z \le f(x,y)\})\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dxdy$, и с другой стороны, $\mu_{m+n+1}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^m}\mu_{n+1}(\{(y,z) \mid 0 \le z \le f(x,y)\})\,dx = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy\right)\,dx$. Второе равенство доказывается аналогично. □

Следствие 2. *Если функция f суммируема и $|g(x)| \le |f(x)|$ почти всюду, то g суммируема.*

Доказательство. Согласно следствию 1 лекции 5, достаточно рассмотреть случай, когда функции f и g неотрицательны. В этом случае суммируемость f эквивалентна тому, что ее подграфик имеет конечную меру Лебега. Но подграфик g — подмножество подграфика f (с точностью до множества меры нуль) и тоже имеет конечную меру. □

Пример 1. Вычислим величину $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. По теореме Фубини $J^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$. Если Ω_R — круг радиуса R с центром в начале координат, $e^{-x^2-y^2}\chi_R(x,y) \to e^{-x^2-y^2}$ при $R \to +\infty$ равномерно на всей плоскости, откуда $J^2 = \lim_{R\to+\infty}\int_{\Omega_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$. Вырежем из круга Ω_R его радиус $\gamma = \{(x,0) \mid 0 \le x \le R\}$ и рассмотрим диффеоморфизм $f : (0,2\pi)\times[0,R] \to \Omega_R \setminus \gamma$, заданный формулой $f(\varphi, r) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (замена декартовых координат на полярные). Производная преобразования f имеет матрицу $f'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, определитель которой равен r. Применяя теорему о замене переменной, получим $\int_{\Omega_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^R\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,d\varphi dr = 2\pi\int_0^R re^{-r^2}\,dr = \pi(1 - e^{-R^2})$, откуда $J^2 = \pi$ и $J = \sqrt{\pi}$.