ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Определение гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, гладкого отображения, касательного пространства и производной.

Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким m-мерным подмногообразием*, если существует набор открытых подмножеств $U \subset \mathbb{R}^n$ (*координатных окрестностей*; иногда так называют также пересечение $M \cap U$), покрывающих в совокупности M, и для каждого из этих подмножеств U существует открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ (*карта*) и гладкое отображение $s_U : \tilde{U} \to U$ (*параметризация*) такое, что

1) $s_U(\tilde{U}) = M \cap U$, и отображение $s_U : \tilde{U} \to M \cap U$ является гомеоморфизмом.
2) Производная $s'_U(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в любой точке $x \in \tilde{U}$ имеет ранг m.

Из пункта 1 следует, что существует отображение $s_U^{-1} : M \cap U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$, называемое *координатным*: $s_U^{-1}(a) = (x_1(a), \dots, x_m(a))$; числа $x_1(a), \dots, x_m(a)$ называются координатами точки a (по отношению к карте $\tilde{U}$).

Пример 1. Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерное подмногообразие. Здесь можно взять $U = \tilde{U}$, $s_U = \mathrm{id}$. Обратно, если $M \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерное подмногообразие, то всякая его точка a имеет окрестность U, являющуюся образом открытого множества $\tilde{U}$ при отображении $s_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, производная которого в точке A такой, что $a = s_U(A)$, имеет ранг n. По теореме об обратной функции a является внутренней точкой образа отображения s_U, т.е. внутренней точкой U. Отсюда следует, что $M \subset \mathbb{R}^n$ открыто.

Пример 2. Окружность $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — одномерное подмногообразие в $\mathbb{R}^2$. Например, можно взять $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$, $\tilde{U}_1 = (0, 2\pi)$, $s_{U_1}(\varphi) = \sin\varphi$, и $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}$, $\tilde{U}_1 = (-\pi, \pi)$, $s_{U_2}(\psi) = \sin\psi$.

Пример 3. Множество $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ не является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$. Действительно, пусть Ω — круг в $\mathbb{R}^2$, содержащий начало координат. Если Q — многообразие, то множество $Q \cap \Omega$ должно быть гомеоморфно некоторому открытому подмножеству $\tilde{U} \subset \mathbb{R}$. Множество $Q \cap \Omega$ связно, поэтому связно и $\tilde{U}$. Из теоремы о промежуточном значении вытекает, что $\tilde{U} \subset \mathbb{R}$ в этом случае — интервал, открытый луч или вся прямая. Если из $Q \cap \Omega$ удалить начало координат, то оно распадется на 4 компоненты связности. При удалении же точки из интервала, луча или прямой получаются лишь 2 компоненты связности — противоречие.

Пример 4. Спираль S, заданная в полярных координатах как $S = \{(r, \varphi) \mid r = e^t/(1 + e^t), \varphi = t, t \in \mathbb{R}\}$, является гладким одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$; здесь есть единственная карта $U = \mathbb{R}^2$, $\tilde{U} = \mathbb{R}$, $s_U(t) = (e^t/(1 + e^t), t)$ (в полярных координатах). Объединение $\tilde{S}$ этой спирали с окружностью из примера 2 одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$ не является. Действительно, пересечение $\tilde{S} \cap \Omega$, где Ω — маленький круг с центром в точке $(1, 0)$, состоит из счетного числа компонент связности $a_0, a_1, \dots$, где a_0 — дуга окружности, а остальные компоненты принадлежат S. Каждая точка компоненты a_0 является пределом последовательности точек, принадлежащих компонентам a_i. $i \neq 0$. Нетрудно видеть (докажите !), что в $\mathbb{R}$ не существует открытого подмножества с таким свойством, т.е. гомеоморфного $\tilde{S} \cap \Omega$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — m-мерное подмногообразие, $a \in M$, $s_U : \tilde{U} \to M \cap U \ni a$ — параметризация, причем $s_U(A) = a$. Рассмотрим векторное подпространство $T_a M \stackrel{\mathrm{def}}{=} s'_U(A)\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$; очевидно, $\dim T_a M = \operatorname{Rk} s'_U(A) = m$.

Сдвинем пространство $T_a M$ на вектор a — получится аффинное подпространство $a + T_a M$. Для произвольной точки $x \in a + T_a M$ обозначим $\varrho(x, M) = \inf\{\, |x - p| \mid p \in M\}$.

Предложение 1. *1) $\varrho(x, M) = o(\,|x - a|)$ при $x \to a$.*
2) Обратно, если аффинное пространство $a + Q \subset \mathbb{R}^n$ размерности m обладает свойством 1, то $Q = T_a M$.

Доказательство. Поскольку $x \in a + T_a M$, имеем $x = x(v) = a + s'_U(A)v = s_U(A) + s'_U(A)v$ для некоторого $v \in \mathbb{R}^m$. Пусть $q(v) = s_U(A + v)$. Тогда $|x(v) - q(v)| = o(\,|v|)$ при $v \to 0$ по формуле Тейлора. Отсюда $\varrho(x(v), M) = o(\,|v|)$. Но оператор $s'_U(A) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ имеет ранг m, поэтому как оператор из $\mathbb{R}^m$ в свой собственный образ $T_a M = s'_U(A)\mathbb{R}^m$ он обратим — существует линейный оператор $(s'_U(A))^{-1} : T_a M \to \mathbb{R}^m$. Тогда $v = (s'_U(A))^{-1}(x(v) - a)$, откуда $|v| \le C\,|x(v) - a|$ для некоторой константы C. Поэтому $\varrho(x(v), M) = o(\,|x(v) - a|)$ при $x(v) \to a$.

Обратно, если $\varrho(x,M)=o(|x-a|)$, то для всякого x имеется $\varphi(x)\in\tilde U$ такое, что $|x-s_U(\varphi(x))|=o(|x-a|)$. Но тогда $|x-a-s'_U(A)\varphi'(x)|=o(|x-a|)$, откуда следует, что $\varrho(x,a+T_aM)=o(|x-a|)$, то есть $x\in a+T_aM$. Тем самым $Q\subset T_aM$, а в силу равенства размерностей $Q=T_aM$. $\square$

Следствие 1. *Для всех систем координат $(U,\tilde U,s_U)$ в окрестности точки a пространство T_aM одно и то же (что оправдывает обозначение).*

Пример 5. Квадрат $Q=\{(x,y)\subset\mathbb{R}^2\mid \max(|x|,|y|)=1\}$ не является гладким одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$. Действительно, в точке $(1,1)\in Q$ не существует прямой $T_{(1,1)}Q$, обладающей свойством из предложения 1.

Пример 6. Касательная прямая T_aS^1 к окружности примера 2 параллельна касательной к окружности в точке $a\in S^1$ в обычном смысле, но проходит через начало координат (обычная касательная есть аффинное подпространство $a+T_aS^1$). Касательное пространство T_aU к открытому подмножеству $U\subset\mathbb{R}^n$ есть само $\mathbb{R}^n$.

Пусть $a\in M\cap U_1\cap U_2$ — точка многообразия принадлежит сразу двум координатным окрестностям. Тогда для a имеются два набора координат, $s_{U_1}^{-1}(a)\in\tilde U_1\subset\mathbb{R}^m$ и $s_{U_2}^{-1}(a)\in\tilde U_2\subset\mathbb{R}^m$.

Предложение 2. *Пусть $a=s_{U_1}(A_1)=s_{U_2}(A_2)$. Преобразование $\varphi_{U_1,U_2}\stackrel{def}{=}s_{U_2}^{-1}\circ s_{U_1}$ является диффеоморфизмом (т.е. взаимно однозначным гладким отображением, обратное к которому тоже гладко) в некоторой окрестности точки A_1*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Rk}\, s'_{U_1}(A_1)=m$, у матрицы этого отображения имеется ненулевой минор $m\times m$. Поскольку образы операторов $s'_{U_1}(A_1)$ и $s'_{U_2}(A_2)$ совпадают (следствие 1), этот минор можно взять для них общим; без ограничения общности это — угловой минор, порожденный первыми m столбцами матрицы. Пусть $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ — проекция на подпространство, порожденное первыми m координатными векторами. Тогда отображение $\sigma_{U_1}=\pi\circ s_{U_1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ имеет невырожденную производную $\sigma'_{U_1}(A_1)=\pi\circ s'_{U_1}(A_1)$ и, следовательно, обратимо (теорема об обратной функции). То же самое верно для $\sigma_{U_2}=\pi\circ s_{U_2}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$. Следовательно, гладким и обратимым является и преобразование $\sigma_{U_2}^{-1}\circ\sigma_{U_1}=s_{U_2}^{-1}\circ s_{U_1}=\varphi_{U_1,U_2}$. $\square$

Пример 7. Пусть U_1,U_2 координатные окрестности окружности S^1 из примера 2. Тогда $S^1\cap U_1\cap U_2$ состоит из двух дуг, γ_1 и γ_2 — верхней и нижней полуокружности. Отображение замены координат φ_{U_1,U_2} для точки $a\in\gamma_1$ (здесь $A_1\in(0,\pi)$ и $A_2\in(0,\pi)$) — тождественное, а для точки $a\in\gamma_2$ (здесь $A_1\in(\pi,2\pi)$ и $A_2\in(-\pi,0)$) действует по формуле $\psi=\varphi-2\pi$.

Отображение $f:M\to K$ двух подмногообразий (возможно, разной размерности) называется гладким, если для всякой точки $a\in M$ и систем координат $(U,\tilde U,s_U)$ и $(V,\tilde V,s_V)$ в окрестностях a и $f(a)\in K$ отображение $f_{UV}=s_V^{-1}\circ f\circ s_U:\tilde U\to\tilde V$ ("запись отображения f в координатах U,V") — гладкое. Пусть $a=s_U(A)\in M$, и $v\in T_aM$, то есть $v=s'_U(A)w$ для некоторого $w\in\mathbb{R}^m$.

Предложение 3. *Вектор $(f\circ s_U)'(A)w\in\mathbb{R}^n$ принадлежит пространству $T_{f(a)}K$, зависит только от вектора $v=s'_U(A)w\in T_aM$, и притом линейно.*

Тем самым определен линейный оператор $f'(a):T_aM\to T_{f(a)}K$, называемый производной отображения f в точке a.

Доказательство предложения 3. Если $a=s_{U_1}(A_1)$ и $v=s'_{U_1}(A_1)w_1$, то $s_U=s_{U_1}\circ\varphi_{U,U_1}$, $s'_{U_1}(A_1)=s'_U(A)\circ\varphi'_{U,U_1}(A_1)$, откуда $w=\varphi'_{U,U_1}(A_1)w_1$, и $(f\circ s_U)'(A)w=(f\circ s_{U_1})'(A)w_1$. Поскольку $f(s_U(A+w))\in K$, имеем по формуле Тейлора $\varrho(f(a)+(f\circ s_U)'(A)w,K)=o(|w|)$ при $w\to0$, откуда вытекает, что $(f\circ s_U)'(A)w\in T_{f(a)}K$. Линейность очевидна. $\square$

Пример 8. Если $M\subset\mathbb{R}^n$ — m-мерное подмногообразие, и $\iota:M\to\mathbb{R}^n$ — отображение вложения (при котором каждой точке сопоставляется она сама, но уже как элемент $\mathbb{R}^n$), то $\iota'(a):T_aM\to\mathbb{R}^n=T_{\iota(a)}\mathbb{R}^n$ — тоже отображение вложения (подпространства в пространство).