ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Касательное расслоение.

Предложение 1 (правило дифференцирования сложной функции для многообразий). *Пусть M_1, M_2, M_3 — подмногообразия, и $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ — гладкие отображения. Тогда отображение $h = g \circ f : M_1 \to M_3$ гладкое, и $h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.*

Доказательство состоит в применении соответствующей теоремы для линейных пространств к координатным записям отображений.

Предложение 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, для которого $c \in \mathbb{R}^m$ является регулярным значением: если $f(x) = c$, то $\operatorname{Rk} f'(x) = m$. Тогда множество $f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$ является гладким $(n-m)$-мерным подмногообразием. Имеет место равенство $T_a f^{-1}(c) = \operatorname{Ker} f'(a)$.*

Доказательство. Пусть $f(a) = c$; обозначим $V = \operatorname{Ker} f'(a) \subset \mathbb{R}^n$. По условию, $\dim V = n - m$, и ограничение $f'(a)$ на любое дополнительное к V подпространство $W \subset \mathbb{R}^n$ (т.е. такое что $\mathbb{R}^n = W + V$ и $\dim W = m$) обратимо. Рассмотрим отображение $F : W \times V \to \mathbb{R}^m$, действующее по формуле $F(v, w) = f(a + v + w)$, так что $F(0, 0) = c$. Тогда по теореме о неявной функции существует такое отображение $r : \tilde{U} \to W$, где $\tilde{U} \subset V$ — некоторая окрестность нуля, что $F(v, r(v)) \equiv c$, т.е. $(v, s(v)) \in M$, и $r(0) = 0$. Отображение $s(v) \stackrel{\text{def}}{=} a + v + r(v)$ является параметризацией многообразия $f^{-1}(c)$ в окрестности точки a. Из теоремы о неявной функции вытекает, что $r'(0) = 0$, откуда $s'(0) : V \to \mathbb{R}^n$ — оператор вложения (напомним, что V — подпространство $\mathbb{R}^n$). Следовательно, $T_a f^{-1}(c) = s'(0)V = V$. □

Пример 1. Сфера $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ — гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$; тогда $f'(x) = (2x_1, \dots, 2x_n) \in \mathbb{R}^n$. Если $f(x) = 1$ (то есть $x \in S^{n-1}$), то $x \neq 0$, откуда $f'(x) \neq 0$, то есть $\operatorname{Rk} f'(x) = 1$. Аналогично, многообразием размерности $n-1$ является любая квадрика вида $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2 = 1\}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$. К вырожденной же квадрике $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ предложение 2 неприменимо, поскольку $(0, 0) \in M$ и $f'(0, 0) = 0$, где $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Действительно, как было доказано в лекции 7, множество M (пара прямых) многообразием не является. В то же время множество $P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = 0\}$ — подмногообразие (прямая), хотя для всякой точки $(x_1, x_2) \in P$ имеем $g'(x_1, x_2) = 0$, где $g(x_1, x_2) = x_1^2$. Таким образом, прообраз критического (нерегулярного) значения также может быть многообразием.

Если $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ — многообразия, и $M_1 \subset M_2$, то говорят, что M_1 — подмногообразие M_2.

Следствие 1 (предложения 2). *Если $f : M \to K$ — гладкое отображение многообразий, и $c \in K$ не является критическим значением (если $f(a) = c$, то $\operatorname{Rk}(f'(a)) = k$), то множество $f^{-1}(c) \subset M$ является подмногообразием в M размерности $m - k$.*

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие размерности m, $(U, \tilde{U}, s_U)$ — система координат в окрестности точки $a = s_U(A) \in M$. Тогда в пространстве $T_a M$ возникает базис $\frac{\partial}{\partial x_1}(a) \stackrel{\text{def}}{=} s_U'(A)e_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a) \stackrel{\text{def}}{=} s_U'(A)e_m$, где $e_1, \dots, e_m$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$.

Предложение 3. *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий, $(U, \tilde{U}, s_U)$ — система координат в окрестности точки $a = s_U(A) \in M$, а $(V, \tilde{V}, s_V)$ — система координат в окрестности точки $b = f(a) = s_V(B) \in N$. Тогда матрица отображения $f'(a)$ в базисах $\frac{\partial}{\partial x_1}(a) = s_U'(A)e_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a) = s_U'(A)e_m$ в $T_a M$ и $\frac{\partial}{\partial y_1}(b) = s_V'(B)e_1, \dots, \frac{\partial}{\partial y_k}(b) = s_V'(B)e_k$ в $T_b N$ есть $\frac{\partial (f_{UV})_i}{\partial x_j}(A)$, где $f_{UV} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ (координатная запись отображения f) определяется равенством $f_{UV} = s_V^{-1} \circ f \circ s_U$.*

Доказательство. Имеем $f'(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a) = f'(a)s_U'(A)e_i = (f \circ s_U)'(A)e_i = (s_V \circ f_{UV})'(A)e_i = s_V'(f_{UV}(A))f_{UV}'(A)e_i$. Согласно формуле для матрицы производной отображения векторных пространств, имеем $f_{UV}'(A)e_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f_{UV})_j}{\partial x_i}(A)h_j$, где $h_1, \dots, h_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда $s_V'(f_{UV}(A))f_{UV}'(A)e_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f_{UV})_j}{\partial x_i}(A)\frac{\partial}{\partial y_j}(f(a))$. □

Следствие 2. *Если $(U, \tilde{U}, s_U)$ и $(V, \tilde{V}, s_V)$ — две системы координат в окрестности точки $a \in M$, и $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a)$ и $\frac{\partial}{\partial y_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}(a)$ — соответствующие базисы в $T_a M$, то $\frac{\partial}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial (\varphi_{UV})_i}{\partial x_k}(A)\frac{\partial}{\partial y_i}(a)$, где $\varphi_{UV} \stackrel{def}{=} s_V^{-1} \circ s_U$ — отображение перехода, и $a = s_U(A)$.*

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие размерности m. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ множество $TM \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, v) \mid v \in T_a M\}$, называемое касательным расслоением к M.

Теорема 1. *Касательное расслоение к M является многообразием размерности $2m$. Естественная проекция $\pi : TM \to M$, действующая по формуле $\pi(a, v) = a$ — гладкое отображение.*

Доказательство. Пусть $(U, \tilde{U}, s_U)$ — карта на M в окрестности точки a. Рассмотрим множество $\tilde{V} = \tilde{U} \times \mathbb{R}^m$ и отображение $s_V : \tilde{V} \to \mathbb{R}^{2n}$, действующее по формуле $s_V(x, \alpha) = (s_U(x), s'_U(x)\alpha) = (s_U(x), \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x))$ (где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$). Очевидно, $s_V(x, \alpha) \in \{x\} \times s'_U(x)\mathbb{R}^m \subset TM$, а поскольку $s'_U(x) : \mathbb{R}^m \to T_x M$ — обратимое отображение, s_V — гомеоморфизм $\tilde{V}$ на некоторую окрестность точки $(a, v) \in TM$. Имеем $s'_V(a, v) = s'_U(a) \times s'_U(a)$ (блочно-диагональная матрица, оба блока которой равны $s'_U(a)$), откуда $\operatorname{Rk} s'_V(a, v) = 2m$, и теорема доказана. □

Пусть $(U_1, \tilde{U}_1, s_1)$ и $(U_2, \tilde{U}_2, s_2)$ — две системы координат в окрестности точки $a \in M$, и φ_{12} — соответствующее отображение перехода. Если $(V_1, \tilde{V}_1, \varrho_1)$ и $(V_2, \tilde{V}_2, \varrho_2)$ — соответствующие системы координат в TM, то, как нетрудно убедиться, отображение R_{12} перехода между ними действует по формуле $R_{12}(x, \alpha) = (\varphi_{12}(x), \varphi'_{12}(x)\alpha)$.

Пример 2. Пусть $a \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ (единичная окружность с центром в начале координат). На окружности рассмотрим атлас из двух карт $U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ и $U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$, и в каждой из них угловую координату $\varphi_1 = s_{U_1}^{-1} : U_1 \to \mathbb{R}$ и $\varphi_2 = s_{U_2}^{-1} : U_1 \to \mathbb{R}$, как в примере 2 лекции 7. Преобразование замены координат имеет вид $\varphi_2(a) = \varphi_1(a) + const$. (где постоянная разная на разных дугах пересечения $U_1 \cap U_2$), откуда $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(a) = \frac{\partial}{\partial \varphi_2}(a)$ в любой точке $a \in U_1 \cap U_2$. Таким образом, для каждого a однозначно определен вектор $\frac{\partial}{\partial \varphi}(a) \in T_a S^1$. Этот вектор, очевидно, зависит от a гладко (как элемент $\mathbb{R}^2$ или, что то же самое, как точка многообразия TS^1) и не равен нулю, то есть образует в пространстве $T_a S^1$ базис.

Определим отображение $f : S^1 \times \mathbb{R} \to TS^1$ формулой $f(a, \alpha) = (a, \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}(a))$. Из сказанного выше вытекает, что это отображение гладкое и взаимно однозначное. Нетрудно проверить, что обратное к нему тоже гладкое — следовательно, многообразия $S^1 \times \mathbb{R}$ и TS^1 диффеоморфны.

Можно показать, что многообразия TS^2 и $S^2 \times \mathbb{R}^2$ не диффеоморфны.