# ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Лемма Сарда. Касательные векторы как функционалы на алгебре функций.

**Предложение 1.** *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие, а $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на нем. Тогда множество критических значений $C = \{f(x) \mid x \in M, f'(x) = 0\} \subset \mathbb{R}$ имеет лебегову меру нуль.*

*Доказательство.* Индукция по размерности $m$ многообразия $M$. Если $m = 0$, многообразие $M$ — дискретное множество, поэтому оно не более чем счетно. Следовательно, $C$ тоже не более чем счетно и имеет меру нуль.

Пусть $m > 0$. Многообразие $M$ можно покрыть не более чем счетным количеством карт (координатных окрестностей), каждая из которых отождествляется (с помощью соответствующей параметризации) с открытым шаром в $\mathbb{R}^m$. Поскольку объединение счетного набора множеств меры нуль — множество меры нуль, достаточно рассмотреть случай, когда $M \subset \mathbb{R}^m$ — открытый шар.

Пусть $1 \le k \le m-1$ и $I = (i_1, \dots, i_{k+1})$, где $1 \le i_s \le m$ для всех $s$. Обозначим $A_{kI} \subset M$ множество точек $a \in M$, для которых все частные производные функции $f$ до порядка $k$ включительно равны нулю, но $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(a) \ne 0$. Обозначим $h_{kI}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)$, и пусть $B_{kI} = \{a \in M \mid h_{kI}(a) = 0, \frac{\partial h_{kI}}{\partial x_{i_{k+1}}}(a) \ne 0\}$; тогда $A_{kI} \subset B_{kI}$. Согласно теореме о неявной функции, $B_I \subset M$ — подмногообразие размерности $m-1$. Любая точка $a \in A_{kI}$ является критической для ограничения $f|_{B_{kI}}$ функции $f$ на гиперповерхность $B_{kI}$. Отсюда по предположению индукции вытекает, что $f(A_{kI}) \subset \mathbb{R}$ имеем меру нуль.

Рассмотрим теперь множество $A_m$ тех точек $a \in M$, в которых все частные производные $f$ до порядка $m$ включительно равны нулю. При $a \in A_m$ и $|x - a| < \delta$ имеем $f(x) = f(a) + \int_0^1 \frac{d}{dt_1} f(a + t_1(x-a))\, dt_1 = f(a) + \sum_{j_1=1}^m (x_{j_1} - a_{j_1}) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}(a + t_1(x-a))\, dt_1 = f(a) + \sum_{j_1,j_2=1}^m (x_{j_1} - a_{j_1})(x_{j_2} - a_{j_2}) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}(a + t_1 t_2 (x - a))\, dt_1 dt_2 = \dots = f(a) + \sum_{j_1,\dots,j_{m+1}=1}^m (x_{j_1} - a_{j_1}) \dots (x_{j_{m+1}} - a_{j_{m+1}}) \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}}(a + t_1 \dots t_{m+1}(x - a))\, dt_1 \dots dt_{m+1}$, откуда $|f(x) - f(a)| \le R\,|x-a|^{m+1}$, где $R = \max_{|x-a|\le\delta} \max_{(j_1,\dots,j_{m+1})} \left|\frac{\partial f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}}(x)\right|$; максимум существует (конечен), поскольку шар $\{x \mid |x-a| \le \delta\}$ компактен, а частные производные непрерывны.

Для любого $\varepsilon > 0$ множество $A_m$ (как и любое подмножество шара $M$) может быть покрыто $N < const. \cdot \varepsilon^{-m}$ шарами радиуса $\varepsilon$. Тогда в силу только что выписанной оценки для $|f(x) - f(a)|$ множество $f(A_m) \subset \mathbb{R}$ может быть покрыто конечной системой интервалов суммарной длины не более $N\varepsilon^{m+1} \le const. \cdot \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, это и означает, что $f(A_n)$ имеет меру нуль. Тем самым и множество $C = \bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_I f(A_{kI}) \cup f(A_m)$ имеет меру нуль. □

Подмножество $A \subset M$ многообразия называется множеством меры нуль, если для всякой системы координат $(U, s_U)$ множество $s_U^{-1}(A \cap U) \subset \mathbb{R}^m$ имеет меру нуль.

**Теорема 1** (лемма Сарда, она же лемма Брауна, теорема Морса, лемма Тома и др.). *Пусть $M, N$ — многообразия, а $f : M \to N$ — гладкое отображение. Тогда множество критических значений $C = \{f(x) \mid x \in M, \operatorname{Rk} f'(x) < n\} \subset N$ имеет меру нуль.*

*Доказательство.* Как и в предложении 1, достаточно рассмотреть случай, когда $N = \mathbb{R}^n$, а $M \subset \mathbb{R}^m$ — открытый шар.

Совместная индукция по $m$ и $n$. При $n = 1$ теорема уже доказана (предложение 1). При произвольном $n$ обозначим $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, и пусть $\Phi = \{f_n(x) \mid f_n'(x) = 0\} \subset \mathbb{R}$ — множество критических значений гладкой функции $f_n$. Тогда $C \subset C_1 \cup C_2$, где $C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(u_1, \dots, u_{n-1}, c) \mid c \in \Phi\}$ и $C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid f_n'(x) \ne 0, \operatorname{Rk} f'(x) < n\}$.

В силу предложения 1 множество $\Phi \subset \mathbb{R}$ имеет одномерную меру нуль — следовательно, меру нуль ($n$-мерную) имеет и $C_1$. С другой стороны, по теореме о неявной функции для всякого $c \in \mathbb{R}$ множество $H_c = \{x \in M \mid f_n(x) = c, f_n'(x)\} \subset M$ — гиперповерхность (многообразие размерности $m-1$), причем $T_x H_c = \operatorname{Ker} f_n'(x) \subset \mathbb{R}^n$. Поскольку $\operatorname{Rk} f'(x) < n$, ограничения функционалов $f_1'(x), \dots, f_{n-1}'(x)$ на подпространство $\operatorname{Ker} f_n'(x)$ линейно зависимы. Следовательно, $(c_1, \dots, c_{n-1}, c) \in C_2$ тогда и только тогда, когда $(c_1, \dots, c_{n-1})$ является критическим значением отображения $\tilde{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) : H_c \to \mathbb{R}^{n-1}$. По индукции, $\operatorname{mes}_{n-1}\{(c_1, \dots, c_{n-1}) \mid (c_1, \dots, c_{n-1}, c) \in C_2\} = 0$ для всякого $c$, откуда по теореме Фубини $\operatorname{mes}_n(C_2) = 0$. □

**Следствие 1.** *Пусть $f: M \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, причем размерность $M$ меньше $m$. Тогда образ $f(M) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.*

Действительно, в этом случае образ и множество критических значений — одно и то же.

*Пример* 1. Пусть $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим отображение $\varphi : S^1 \to S^2$, заданное равенством $\varphi(t) = f'(x)/|f'(x)|$; здесь $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — стандартная сфера единичного радиуса. Согласно следствию 1 образ $\varphi(S^1) \neq S^2$; пусть $a \in S^2 \setminus \varphi(S^1)$.

Рассмотрим ортогональную проекцию $\pi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ на плоскость, перпендикулярную вектору $a$. В силу выбора $a$ плоская кривая $\pi_a \circ \gamma : S^1 \to S^2$ — гладкая; она называется диаграммой пространственной кривой $\gamma$.

*Пример* 2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, и пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — некритическое значение отображения $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $\varphi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданную равенством $\varphi_a(x) = f(x) - (a, x)$ (скобки означают скалярное произведение). Если $\varphi'(x) = 0$, то $f'(x) = a$ и, следовательно, $\varphi''(x) = f''(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор с нулевым ядром (невырожденная матрица). Следовательно, все критические точки функции $\varphi_a$ невырождены и к ним применима лемма Морса (о приведении к квадратичной форме заменой координат). В силу леммы Сарда вектор $a$ можно взять сколь угодно близким к нулю — следовательно, для всякого шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется функция $g$, все критические точки которой невырождены и $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, $|f'(x) - g'(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in B$.

Пусть $a \in M$ — точка гладкого многообразия, а $v \in T_a M$ — касательный вектор. Тогда любой гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$ можно сопоставить число $\Phi(v)(f) \stackrel{\text{def}}{=} f'(a)v \in \mathbb{R}$ ("производную функции $f$ в направлении вектора $v$"). Очевидно, $\Phi(v)$ является линейным функционалом на алгебре $C^\infty(M)$ гладких функций на $M$ и удовлетворяет соотношению Лейбница $\Phi(v)(fg) = f(a)\Phi(v)(g) + \Phi(v)(f)g(a)$. Если $s_U : U \to \mathbb{R}^n$ — параметризация $M \subset \mathbb{R}^n$ в окрестности точки $a$, а $x = s_U^{-1}$ — соответствующая система координат, причем $x(a) = A$, то при $v = \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ имеем $\Phi(v)(f) = \frac{\partial (f \circ s_U)}{\partial x_i}(A)$, что объясняет обозначение $\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$.

**Теорема 2.** *Для всякого линейного функционала $\nu : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющего соотношению Лейбница в точке $a \in M$, существует и единствен вектор $v \in T_a M$ такой, что $\nu = \Phi(v)$.*

*Доказательство.* Обозначим, $I_a \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C^\infty(M) \mid f(a) = 0\}$ (как в лекции 1 при $M = \mathbb{R}^n$). Аналогично лекции 1 доказывается, что $I_a \subset C^\infty(M)$ — максимальный идеал. Пусть $\nu : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию Лейбница.

Пусть $g \equiv 1$. Тогда $g^2 = g$, откуда $\nu(g) = 2g(a)\nu(g) = 2\nu(g)$, то есть $\nu(g) = 0$. Из этого вытекает, что $\nu(f) = \nu(f - f(a))$ для всех $f \in C^\infty(M)$, то есть функционал $\nu$ полностью определяется своим ограничением на идеал $I_a$.

Пусть функция $f \in C^\infty(M)$ равна нулю в некоторой окрестности $\tilde{U} \subset M$ точки $a$. Без ограничения общности эта окрестность — координатная; $s_U : U \to \tilde{U}$ — параметризация. Рассмотрим открытые подмножества $V_1 \subset V_2 \subset U$. Тогда по теореме о разбиении единицы (лекция 10 предыдущего семестра, теорема 1) существует гладкая функция $\tilde{g} : U \to \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{g}(x) = 0$ при $x \in V_1$ и $\tilde{g}(x) = 1$ при $x \in U \setminus V_2$. Рассмотрим функцию $g : M \to \mathbb{R}$, равную $\tilde{g} \circ s_U^{-1}(b)$ при $b \in \tilde{U}$, и 1 при $b \notin \tilde{U}$; очевидно, $g \in C^\infty(M)$. Имеем $f \equiv fg$, откуда $\nu(f) = \nu(fg) = f(a)\nu(g) + \nu(f)g(a) = 0$. Следовательно, если функции $f_1(b) = f_2(b)$ при всех $b$ из некоторой окрестности точки $a$, то $\nu(f_1) = \nu(f_2)$. Таким образом, $\nu(f)$ полностью определяется значениями $f$ в произвольной окрестности $a$, и без ограничения общности можно считать, что $M \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество.

Пусть $f'(a) = 0$. Тогда, согласно лемме Адамара (теорема 4 лекции 1; она применима, поскольку $M \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество), $f \in I_a^2$, т.е. $f = \sum_i \alpha_i \beta_i$, где $\alpha_i, \beta_i \in I_a$. Следовательно, $\nu(f) = \sum_i (\alpha_i(a)\nu(\beta_i) + \nu(\alpha_i)\beta_i(a)) = 0$. Иными словами, если $f_1'(a) = f_2'(a)$, то $\nu(f_1) = \nu(f_2)$. Производная $f'(a)$ — линейное отображение $T_a \to \mathbb{R}$, то есть элемент сопряженного пространства $T_a^* M$, а $\nu$, тем самым, является линейным отображением $T_a^* M \to \mathbb{R}$, то есть элементом $(T_a^*)^*$. Стандартная теорема линейной алгебры утверждает, что $(V^*)^* = V$, то есть линейный функционал $\nu : T_a^* M \to \mathbb{R}$ имеет вид $\nu(f) = f'(a)v$ при каком-то $v \in T_a M$.

Докажем единственность $v$. Пусть $\Phi(v) = 0$, то есть $f'(a)v = 0$ при всяком $f \in C^\infty(M)$. Выберем координаты в окрестности $a$ — тогда $\Phi(v)(f) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial (f \circ s_U)}{\partial x_i}(A)$, где $v = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$. Нетрудно показать (проделайте !), что для всякого $i$ имеется функция $f$ такая, что $\frac{\partial (f \circ s_U)}{\partial x_i}(A) \neq 0$, но $\frac{\partial (f \circ s_U)}{\partial x_j}(A) = 0$ при всех $j \neq i$. Равенство $\Phi(v)(f) = 0$ влечет теперь $\alpha_i = 0$ — следовательно, $v = 0$. $\square$

**Следствие 2.** *$(I_a/I_a^2)^* = T_a M$.*

*Доказательство.* Всякому вектору $v \in T_a M$ сопоставляется линейный функционал $\Phi(v) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$. Если $f \in I_a^2$, то $\Phi(v)(f) = 0$ (см. доказательство теоремы 2) — следовательно, $I_a^2 \subset \operatorname{Ker} \Phi(v)$, и $\Phi(v)$ является линейным отображением $I_a/I_a^2 \to \mathbb{R}$, то есть элементом $(I_a/I_a^2)^*$. Тем самым определено линейное отображение $\Phi : T_a M \to (I_a/I_a^2)^*$. Согласно теореме 2, отображение $\Phi$ имеет тривиальное ядро.

Докажем, что $\Phi$ имеет полный образ. Действительно, пусть $\nu \in (I_a/I_a^2)^*$. Если $\pi : I_a \to I_a/I_a^2$ — стандартная проекция, а $\psi : C^\infty(M) \to I_a$ — отображение, сопоставляющее функции $f$ функцию $f(x) - f(a) \in I_a$, то определен линейный функционал $\tilde{\nu} = \nu \circ \pi \circ \psi : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, причем $\nu(1) = 0$. Имеем: $\tilde{\nu}(fg) = \tilde{\nu}(fg+f(a)g(a)) = \tilde{\nu}((f-f(a))(g-g(a))+f(a)g+g(a)f) = f(a)\tilde{\nu}(g)+\tilde{\nu}(f)g(a)$, поскольку $(f-f(a))(g-g(a)) \in I_a^2$. Следовательно, $\tilde{\nu}$ удовлетворяет тождеству Лейбница, и, согласно теореме 2, $\nu = \Phi(v)$ для некоторого $v \in T_aM$. Тем самым $\Phi(T_aM) = (I_a/I_a^2)^*$. $\square$