ЭКЗАМЕН 10–21 МАЯ 2006 Г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написаны фамилия и имя сдающего экзамен* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО****.*
2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова “Ответ”, за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Работы нужно сдать в учебную часть до 21 мая включительно. Вопросы по условиям задавать Ю. М. Бурману (burman@mccme.ru).

Задача 1. Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная суммируемая функция, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — ее преобразование Фурье, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — действительные числа. Докажите, что матрица (γ_{pq}), где $\gamma_{pq} = G(\lambda_p - \lambda_q)$, $p, q = 1, \dots, n$, эрмитова и неотрицательно определена.

Задача 2. На окружности единичного радиуса наугад выбирают три точки A, B, C. Какова средняя площадь треугольника ABC ?

Задача 3. Пусть $x, y \in [0,1]$ — действительные числа, записываемые в двоичной системе счисления как $0, x_1x_2\dots$ и $0, y_1y_2\dots$ соответственно, а $f(x,y) \in [0,1]$ — число, записываемое в двоичной системе как $0, r_1r_2\dots$, где $r_i = x_i + y_i \bmod 2$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Докажите, что так определенная функция $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ измерима, и вычислите $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$.

Задача 4. Пусть $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — гладкая замкнутая кривая без самопересечений (узел). Докажите, что существует такая плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, что ортогональная проекция $h : S^1 \to \Pi$ кривой γ на эту плоскость а) является гладкой кривой, б) является гладкой кривой, и все ее точки самопересечения трансверсальны: если $h(t_1) = h(t_2)$ и $t_1 \neq t_2$, то векторы $h'(t_1)$ и $h'(t_2)$ непараллельны.

Напоминание. Замкнутая кривая $\mu : S^1 \to \mathbb{R}^n$ называется гладкой, если она является гладким отображением (имеет производные всех порядков в произвольной системе координат) и $\mu'(t) \neq 0$ для всякого $t \in S^1$.

Задача 5. Пусть $O \in \mathbb{R}^2$ — начало координат, а точка $A \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(1,0)$. Докажите, что множество троек точек $B, C, D \in \mathbb{R}^2$ таких, что $OABCD$ — равносторонний пятиугольник (возможно, вырожденный), образует двумерное подмногообразие в $(\mathbb{R}^2)^3 = \mathbb{R}^6$.

Задача 6. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с периодом 1, для которой $c_0(f) = c_1(f) = 0$, где $c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\,dt$ — коэффициенты Фурье функции. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[0,1]$ по крайней мере 3 решения.

Задача 7. Докажите, что а) $\int_{1/4}^{1/2} e^{-\lambda(x^2-x^3)}\,dx = o(1/\lambda^n)$ при $\lambda \to +\infty$ и произвольном $n \in \mathbb{N}$; б) существует константа $C > 0$ такая, что $\int_{-1/2}^{1/2} e^{-\lambda(x^2-x^3)}\,dx \sim C/\sqrt{\lambda}$ при $\lambda \to +\infty$.