ЭКЗАМЕН 4–11 ОКТЯБРЯ 2006 Г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написаны фамилия и имя сдающего экзамен* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО.***
2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Работы нужно сдать в учебную часть до 11 октября включительно. Вопросы по условиям задавать Ю. М. Бурману (`burman@mccme.ru`).

Задача 1. Каждую точку $(n-2)$-мерной сферы $S_1 = \{(1, x_2, \dots, x_n) \mid x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ соединили отрезком с каждой точкой $(n-1)$-мерного шара $B_{-1} = \{(-1, x_2, \dots, x_n) \mid x_2^2 + \dots + x_n^2 \le 1\}$. Найдите n-мерный объем объединения всех этих отрезков.

Указание. Объем k-мерного шара единичного радиуса равен $v_k = \frac{\pi^{k/2}}{(k/2)!}$ для четного k и $v_k = \frac{2^{(k+1)/2}\pi^{(k-1)/2}}{k!!}$ для нечетного k.

Задача 2. Пусть $C^\infty(\mathbb{R})$ — пространство гладких функций, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, и $M_f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ — линейный оператор умножения на функцию f ($M_f(g) \stackrel{\text{def}}{=} fg$). Докажите, что а) множество собственных значений M_f имеет меру нуль; б) если $f \ne const.$, то спектр оператора M_f имеет положительную меру.

Указание. Спектром оператора A называется множество таких λ, что оператор $A - \lambda I$ не имеет обратного. Собственное значение всегда является точкой спектра (почему ?), но обратное в бесконечномерном случае неверно.

Задача 3. Обозначим $D \subset [0, 1]$ множество таких чисел a, что ряд $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n/n$ расходится, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \in \{0, 1\}$ — цифры двоичного представления числа a. Докажите, что D имеет меру нуль.

Задача 4. Докажите, что $\int_{[0,1]^2} \frac{x\ln(xy)\,dx\,dy}{1-xy}$ сходится.

Задача 5. а) Докажите, что существует и единственна гладкая функция $f : [0, 1] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, для которой $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ при $0 < x < 1$, $t > 0$, а также $f(0, t) = f(1, t) = 0$ и $f(x, 0) = x - x^2$. б) Докажите, что функция f ограничена.

Задача 6. Положим $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-n^2 t}$, где $t > 0$. Докажите тождество $\theta(1/t) = \sqrt{t}\theta(t)$.