РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКЗАМЕНА 10–21 МАЯ 2006 Г.

Стоимость задач: N1 — 3 балла ($\pm$= 2, $\mp$= 1), N2 — 3 балла ($\pm$= +/2= 2, $\mp$= 1), N3 — 2 балла (+/2= 1), N4a — 3 балла ($\pm$= 2, $\mp$= 1), N4б — 8 баллов (+/2= 4, $\mp$= 2), N5 — 4 балла (+/2= 2, $\mp$= 1), N6 — 6 баллов ($\pm$= 4, $\mp$= 2), N7a — 2 балла, N7б — 8 баллов (+/2= 4, $\mp$= 2).

Критерии оценок: "отлично" — ≥ 25 баллов, "хорошо" — ≥ 15 баллов, "удовлетворительно" — ≥ 10 баллов.

Курс засчитывается, если сдан экзамен и зачет.

Идеи решений:

Задача 1. $\gamma_{qp} = \int_0^1 g(t)e^{-2\pi(\lambda_q-\lambda_p)t}\,dt = \int_0^1 g(t)\overline{e^{-2\pi(\lambda_p-\lambda_q)t}}\,dt = \overline{\int_0^1 g(t)e^{-2\pi(\lambda_p-\lambda_q)t}\,dt} = \overline{\gamma_{pq}}$, то есть матрица эрмитова. Теперь $\sum_{p,q}\gamma_{pq}x_p\overline{x_q} = \int_0^1 g(t)Y(t)\overline{Y(t)}\,dt \geq 0$, где $Y(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{s=1}^n e^{-2\pi i\lambda_s t}x_s$.

Задача 2. Ответ: $\frac{3}{2\pi}$.

Задача 3. Определим $f_n(x,y)$ как действительное число, первые n двоичных разрядов которого такие же, как у $f(x,y)$, а остальные разряды — нули. Функция f_n измерима, потому что кусочно-постоянна. С другой стороны, $|f(x,y)-f_n(x,y)| \leq 1/2^n$, откуда $f_n \rightrightarrows f$ при $n\to\infty$, откуда вытекает, что f измерима (множество измеримых функций замкнуто относительно сходимости почти всюду, а тем более — равномерной сходимости). Из равенства $f(x,y)+f(x,1-y)=1$ (верного почти всюду, точнее, для всех x и тех y, в двоичной записи которых нет периода (0)) вытекает, что $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy = 1/2$.

Задача 4. Пункт а): рассмотрим отображение $f: S^1\to S^2$, заданное формулой $f(t)=\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$, и пусть $M = f(S^1)\subset S^2$ — его образ. По лемме Сарда M имеет меру нуль; то же самое верно и для множества $-M = \{-x \mid x\in M\}\subset S^2$. Отсюда вытекает, что существует точка $a\in S^2\setminus(M\cup(-M))$. Ортогональное проектирование узла вдоль вектора a дает гладкую кривую.

Пункт б): рассмотрим отображение треугольника $\Delta = \{(s,t) \mid 0<s<t<1\}$ в сферу S^2, заданное формулой $\Phi(t,s) = (\gamma(t)-\gamma(s))/|\gamma(t)-\gamma(s)|$. Непосредственное вычисление дает: $\lambda(t,s)\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial t} = \gamma'(t) - \big(\gamma'(t),\Phi(t,s)\big)\Phi(t,s)$, $\lambda(t,s)\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s} = \gamma'(s) - \big(\gamma'(s),\Phi(t,s)\big)\Phi(t,s)$, где $\lambda(t,s)\stackrel{\mathrm{def}}{=}|\gamma(t)-\gamma(s)|$, а скобки означают скалярное произведение. Иными словами, $\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial t}$ и $\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}$ являются, с точностью до общего множителя, проекциями векторов $\gamma'(t)$ и $\gamma'(s)$ на плоскость, перпендикулярную $\Phi(t,s)$. Отсюда вытекает, что векторы $v_1=\gamma'(t)$, $v_2=\gamma'(s)$ и $v_3=\gamma(t)-\gamma(s)=\lambda(t,s)\Phi(t,s)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы (коллинеарны) векторы $\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial t}$ и $\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}$ — то есть тогда и только тогда, когда точка (t,s) — критическая для отображения Φ. Иными словами, если $a\in S^2$ таково, что a и $-a$ — некритические значения Φ (такое a существует по лемме Сарда), то для всякого (t,s) такого, что $\Phi(t,s)=a$, векторы v_1,v_2,v_3 линейно независимы. Как легко видеть, это означает, что ортогональная проекция кривой γ вдоль вектора a имеет только трансверсальные самопересечения.

Задача 5. Обозначим вектор $OA = e = (0,1)$, $AB = v_1$, $BC = v_2$, $OD = v_3$, и рассмотрим отображение $f: (\mathbb{R}^2)^3\to\mathbb{R}^4$, заданное формулой $f(v_1,v_2,v_3) = (\,|v_1|^2, |v_2|^2, |v_3|^2, |e+v_1+v_2-v_3|^2)$. Тогда искомое множество есть прообраз $f^{-1}(1,1,1,1)$, и по теореме о неявной функции достаточно доказать, что $(1,1,1,1)$ — регулярное (некритическое) значение. Производная $f'(v_1,v_2,v_3)$ действует на вектор $(\alpha_1,\alpha_2.\alpha_3)\in(\mathbb{R}^2)^3 = T_{(v_1,v_2,v_3)}(\mathbb{R}^2)^3$ по формуле: $f'(v_1,v_2,v_3)(\alpha_1,\alpha_2.\alpha_3) = (2(v_1,\alpha_1), 2(v_2,\alpha_2), 2(v_3,\alpha_3), 2(e+v_1+v_2-v_3, \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3))$ (внутренние скобки означают скалярное произведение). Если образ $f'(v_1,v_2,v_3)((\mathbb{R}^2)^3)\neq\mathbb{R}^4$, то имеется ненулевой функционал $(p,q,r,s)\in(\mathbb{R}^4)^*$, аннулирующий этот образ. Иными словами, $pv_1+s(e+v_1+v_2-v_3)=0$, и аналогично для v_2,v_3. Это означает, что все стороны пятиугольника лежат на одной прямой, что невозможно. Кстати, это рассуждение проходит для всех многоугольников с нечетным числом сторон, а если число сторон четно — не проходит. Действительно, множество плоских равносторонних четырехугольников многообразием не является (проверьте !).

Задача 6. Если функция имеет бесконечное число нулей, то задача решена, так что считаем число нулей конечным. В каждом нуле функция f либо меняет знак, либо сохраняет; будем считать только нули первого типа, а про вторые забудем. Количество нулей первого типа четно, поэтому на самом деле будем доказывать, что нулей не меньше 4. Из равенства $c_0(f) = \int_0^1 f(t)\,dt = 0$ вытекает, что хотя бы один нуль имеется — следовательно, их не менее двух. Пусть их ровно два: $f(p)=f(q)=0$. Равенство $c_1(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi it}\,dt = 0$ в силу $f(t)\in\mathbb{R}$ означает, что $\int_0^1 f(t)\cos 2\pi t\,dt = \int_0^1 f(t)\sin 2\pi t\,dt = 0$ и, следовательно, $\int_0^1 f(t)(A+B\cos 2\pi t+$

$C\sin 2\pi t)\,dt = 0$ для всех $A, B, C \in \mathbb{R}$. Нетрудно подобрать константы A, B и C так, чтобы функция $A + B\cos 2\pi t + C\sin 2\pi t$ имела нули в точности в точках p и q (всего эта функция на отрезке $[0,1]$ имеет не более двух нулей), откуда вытекает, что функция $f(t)(A + B\cos 2\pi t + C\sin 2\pi t)$ знакопостоянна, вопреки тому, что интеграл от нее равен нулю.

Задача 7. На отрезке $[0, 1/2]$ функция $x^2 - x^3$ возрастает, откуда для всякого $0 < \delta < 1/2$ и всякого $\lambda > 0$ имеем $\int_\delta^{1/2} e^{-\lambda(x^2-x^3)}\,dx < \frac{1}{2}e^{-\lambda(\delta^2-\delta^3)} = o(1/\lambda^n)$ при $\lambda \to +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$ произвольно). При $\delta = 1/4$ получаем пункт а). Аналогично доказывается, что $\int_{-1/2}^{-\delta} e^{-\lambda(x^2-x^3)}\,dx = o(1/\lambda^n)$. Рассмотрим теперь функцию $y(x)$ такую, что $y^2(x) = x^2 - x^3$. Поскольку $y'(0) = 1$, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[-\delta, \delta]$, на котором существует обратная функция y^{-1}, и $1 - \varepsilon < y'(y^{-1}(t)) < 1 + \varepsilon$ при $t \in [-\delta, \delta]$. Делая в интеграле $I_\delta = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda(x^2-x^3)}\,dx$ замену переменной $t = y(x)$, получим $I_\delta = \int_a^b e^{-\lambda t^2} \frac{dt}{y'(y^{-1}(t))}$ (для некоторых a, b), откуда $(1-\varepsilon)\int_a^b e^{-\lambda t^2}\,dt < I_\delta < (1+\varepsilon)\int_a^b e^{-\lambda t^2}\,dt$. Аналогично предыдущему, доказываем, что $\int_a^{+\infty} e^{-\lambda t^2}\,dt = o(1/\lambda^n)$ и $\int_{-\infty}^b e^{-\lambda t^2}\,dt = o(1/\lambda^n)$ при $\lambda \to +\infty$ — следовательно, при достаточно малом δ имеем $(1-2\varepsilon)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2}\,dt < I_\delta < (1+2\varepsilon)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2}\,dt$, то есть $(1-2\varepsilon)C/\sqrt{\lambda} < I_\delta < (1+2\varepsilon)C/\sqrt{\lambda}$ для константы $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. В силу произвольности ε получаем $I_\delta \sim \sqrt{\pi}/\sqrt{\lambda}$, откуда вытекает утверждение пункта б).