ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Обозначим Mat_n пространство матриц $n \times n$ с действительными матричными элементами.

Задача 1. Найдите $f'(x_*)$ для всех возможных x_* и опишите множество тех x_*, для которых оператор $f'(x_*)$ имеем наибольший возможный ранг: а) $f : \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{Mat}_n$, $f(X) = X^{-1}$; б) $f : \mathrm{Mat}_n \to \mathbb{R}$, $f(X) = \det X$; в) $f : \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{Mat}_n$, $f(X) = XAX^{-1}$, где A — какая-то фиксированная матрица; г) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, xy)$.

Задача 2. Пусть $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 z = y^2\}$ (“зонтик Уитни”). а) Нарисуйте это множество. б) Для каждой точки $(x_*, y_*, z_*) \in M$ выясните, какими из пар координат (x, y), (y, z), (x, z) можно запараметризовать окрестность точки (x_*, y_*, z_*) (то есть можно однозначно задать произвольную точку M, достаточно близкую к (x_*, y_*, z_*)).

Отображение $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ называется гладкой замкнутой кривой, если оно бесконечно дифференцируемо, $f'(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$, и $f(0) = f(1)$, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)$ при всех $k \geq 1$.

Задача 3. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ — гладкая замкнутая кривая, и $M_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \min_{t\in[0,1]} |f(t) - x| = r\}$. а) Пусть для точки $x \in M_r$ минимум достигается при некотором $t_x \in [0, 1]$. Докажите, что отрезок $[x, f(t_x)]$ перпендикулярен касательной к кривой f в точке t_x. б) Докажите, что если кривая не имеет самопересечений ($f(t_1) \neq f(t_2)$ при $t_1 \neq t_2 \in (0, 1)$), а $r > 0$ достаточно мало, то для всякого $x \in M_r$ точка t_x единственна. в) Докажите, что при достаточно малом $r > 0$ множество M_r является объединением образов двух гладких замкнутых кривых.