2. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

Задача 1. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — гладкая двоякопериодическая функция: $f(x+1, y) = f(x, y+1) = f(x, y)\, \forall x, y$. Докажите, что существует точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ такая, что $f'(x, y) = 0$, но (x, y) не является ни точкой строгого локального максимума, ни точкой строгого локального минимума.

Задача 2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\frac{dx(t)}{dt} = f'(x(t))$. а) Пусть $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_*$. Докажите, что $f'(x_*) = 0$. б) Докажите, что если $\lim_{t\to\infty} x(t)$ (конечный) не существует, то $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$.

Указание. Рассмотрите функцию $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x(t))$.

Задача 3. Пусть f это а) гладкая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) многочлен $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; в) гладкая функция $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Известно, что $(0, 0)$ — точка ее строгого локального минимума и единственная критическая точка (точка, в которой $f' = 0$). Обязательно ли $(0, 0)$ — точка глобального минимума функции f ?

Задача 4. Пусть f_t, $0 \le t \le 1$ — непрерывно зависящее от t семейство гладких функций а) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, б*) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Для всякого t имеет место равенство $f_t(0) = 0$, а уравнение $f_t'(x) = 0$ имеет при $|x| \le 1$ единственное решение $x = 0$. Пусть $x = 0$ — точка локального минимума функции f_0. Докажите, что она является точкой локального минимума функции f_1.