3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задача 0. Докажите равенства $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k-1} x\,dx = \frac{2^{2k}}{kC_{2k}^k}$ и $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k} x\,dx = \frac{\pi C_{2k}^k}{2^{2k}}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Задача 1. Найдите объем а) шара $B_1^{(4)} \subset \mathbb{R}^4$, б) шара $B_1^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$. в) Найдите асимптотику последовательности r_n такой, что $\operatorname{vol} B_{r_n}^{(n)} = 1$.

Указание. $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ при $n \to \infty$.

Задача 2. Найдите $\int_{[0,1]^n} \max(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$ и $\int_{[0,1]^n} \min(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$.

Задача 3. На отрезке $[0,1]$ случайным образом независимо выбирают две точки. а) Найдите среднее расстояние между ними. б) Какова вероятность того, что расстояние между ними больше среднего ? в) Какова вероятность того, что из отрезков, на которые эти точки разбивают $[0,1]$, можно сложить треугольник ?

Центром тяжести множества $S \subset \mathbb{R}^n$ называется точка $Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\operatorname{vol}(S)} \int_S x\,dx \in \mathbb{R}^n$. Моментом инерции множества $S \subset \mathbb{R}^n$ относительно точки $A \in \mathbb{R}^n$ называется число $I_A(S) = \int_S |x - A|^2\,dx$.

Задача 4. Пусть Q — центр тяжести S, а $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная точка. Докажите равенство $I_A(S) = I_Q(S) + |Q - A|^2 \operatorname{vol}(S)$.

Задача 5. Пусть AOB — сегмент параболы: O — вершина параболы, A и B — “углы”; сегмент считается с внутренностью. Пусть C — середина отрезка AB, M — центр тяжести сегмента, N — точка пересечения прямой CM с параболой. Докажите, что прямая CM параллельна оси параболы и вычислите отношение CM/CN.

Задача 6. Пусть AOB — сегмент параболы (как в задаче 5), причем прямая AB перпендикулярна оси параболы. Какой точкой параболы сегмент должен касаться оси абсцисс, чтобы центр тяжести находился на минимальной возможной высоте ?

Задача 7. Вычислите а) момент инерции шара $B_{r_n}^{(n)}$ относительно его центра, где константа r_n определена в задаче 1в; б) центр тяжести верхней половины шара $B_{r_n}^{(n)}$.

Задача 8. Вычислите момент инерции правильного симплекса $T_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0, \dots, x_n \geq 0, x_0 + \dots + x_n = 1\}$ относительно его центра тяжести.

Задача 9. Используя результат задачи 10, а) решите задачу 2; б) найдите $\int_{[0,1]^n} \max^k(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$; в) решите задачу 7а.

Задача 10. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — параллелепипед, $f : \Pi \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $m = \min_\Pi f(x)$, $M = \max_\Pi f(x)$. Пусть функция $\Phi(a) = \operatorname{vol}(\{x \in \Pi \mid f(x) \leq a\})$ — гладкая при $m \leq a \leq M$. Докажите равенство $\int_\Pi f(x)\,dx = \int_m^M a\Phi'(a)\,da$.